Jorge Guala Valverde

INERCIA Y GRAVITACION

La Verdadera Influencia de los Astros

Con la colaboración de
Jorge Tramaglia y Raúl Rapacioli

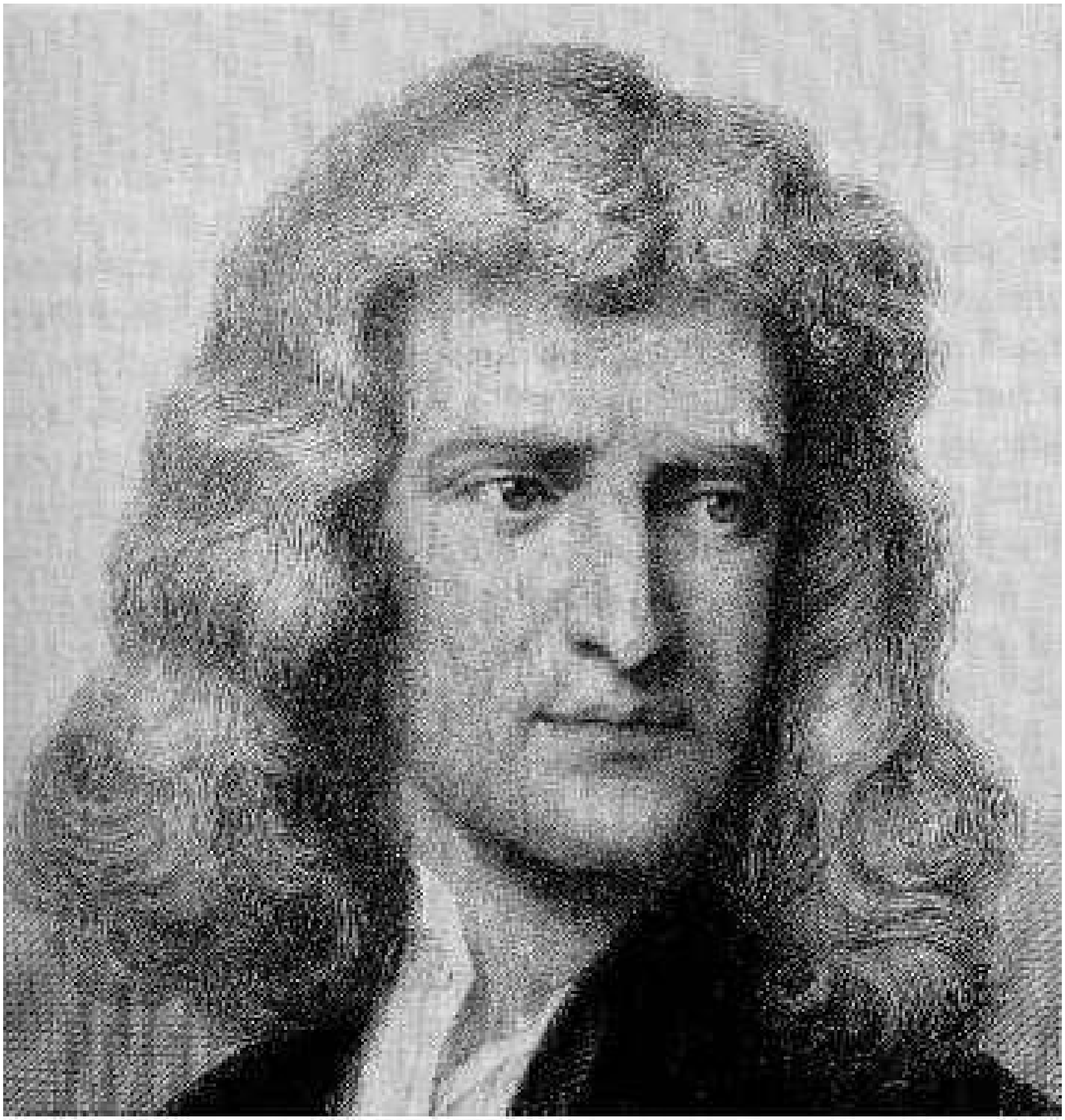
Diagramación, ilustraciones y diseño de tapa: Cristina Gagliardo

FUNDACION JULIO PALACIOS
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE

ISBN: 987-97703-0-7
Primera Edición Neuquén, 1999
Segunda Edición, Neuquén, 2003

Cristina Nora Gagliardo/99

Galileo Galilei (1564 - 1642)



Isaac Newton (1642 - 1727)

ÍNDICE

Amo los mundos sutiles,
Ingrávidos y gentiles
Como pompas de jabón.
Antonio Machado

En memoria del librero Kune Grimberg

PRÓLOGO

Los sutiles tentáculos de la gravitación nos apresan desde el mismo momento en que somos concebidos y nos abandonan recién cuando nos visita la muerte. Así es que no podemos burlar, ni por un instante, esta misteriosa fuerza que nos aplasta contra el suelo y que nos fatiga al subir una montaña.

El deseo de dominar y utilizar a voluntad la **fuerza de la gravedad** estuvo siempre en la mente del hombre (la torre de Babel, las alfombras voladoras, Icaro, Leonardo da Vinci, Julio Verne, místicos que afirmaban levitar...). Este deseo dio lugar a un notable y costoso desarrollo técnico (escaleras, rascacielos, aviones, cohetes,...) y a muchas más fantasías incumplidas, o al menos, no comprobadas fehacientemente en el plano físico (levitación, viajes mentales, etc.).

Otra de nuestras inseparables compañeras es la **inercia**, cualidad oculta en la materia que se opone, permanentemente, a todos y cada uno de los deseos de cambiar nuestro estado, sea éste de reposo o de movimiento. Hagamos lo que hagamos, estará presente este fantasma toda vez que comencemos a movernos o que busquemos el reposo. En un plano utilitarista, mezquino si se quiere, es la inercia uno de los componentes que configura los precios de nuestros fletes, de nuestra industria, de nuestra economía. Es costoso vencerla...

Galileo fue capaz de precisar el significado de la inercia, vislumbrando el concepto de **masa inercial**, con lo que pudo derrumbar dos milenios de física aristotélica.

Newton dio un gigantesco paso al escribir su célebre ley de gravitación universal (1687), que dio cuenta de los movimientos de los planetas atendiendo a sus **masas gravitatorias** y sus **distancias** al sol. También fue el sabio inglés quien mostró que ambas especies de masa (gravitatoria e inercial) están inseparablemente ligadas entre sí en todos los cuerpos conocidos. Si una aumenta, inevitablemente lo hace la otra.

Esta asombrosa proporcionalidad entre dos magnitudes tan diferentes permaneció como un misterio hasta nuestros días. Hubo que esperar hasta el fin de este milenio para que Assis diera con lo que parece ser un indicio del origen de esta singular coincidencia: *la materia es inerte porque es gravitatoria y, a la vez, porque está íntima y eternamente ligada a la totalidad del Cosmos.*

La intención de las líneas que siguen es familiarizar al lector con el lento, tortuoso y fascinante desarrollo de este importante capítulo de la ciencia, materia que interesó a pensadores de la talla de Einstein, Dirac, De Broglie y Schrödinger, por citar a los más conspicuos. Somos optimistas en cuanto a lograr nuestro propósito ya que este ensayo se escribió atendiendo, principalmente, al lector que no maneja a diario una herramienta matemática avanzada. Para quien la posea, y guste de la materia, se ofrecen referencias útiles para la profundización de la misma en la bibliografía citada.

El autor desea agradecer la asistencia brindada por sus colaboradores directos, ambos profesores de la Universidad Nacional del Comahue. También a

los grupos humanos de la Fundación Julio Palacios, y de las Direcciones Generales de Ciencia y Tecnología (Copade) y de Medio Ambiente y Desarrollo Sustentable, ambas del Gobierno de la Provincia del Neuquén. Todos ellos se esfuerzan, a diario, en separar la paja del trigo.

El autor se responsabiliza íntegramente por el contenido del ensayo y recibirá gustoso las críticas que el mismo merezca.

New York, Neuquén. Verano, Invierno de 1999

FUNDACIÓN JULIO PALACIOS
Salta 326 - (8300) - Neuquén - Argentina
Email: fundacionjuliopalacios@usa.net

1 DE ARISTÓTELES A GALILEO

Cuando Aristóteles afirmaba que los cuerpos graves (pesados) debían caer más deprisa que los leves estaba, por cierto, contando la mitad de la verdad. Esto es así porque ya entonces era conocido que los cuerpos graves son solicitados por nuestro planeta con mayor intensidad que los leves (como lo mostraban claramente los diferentes grados de deformación que, sobre sus apoyos, distintos cuerpos provocaban). Esto es, los antiguos tenían ya un claro significado del peso de los cuerpos. Lo que se desconocía en tiempos de Aristóteles es la *reacción inercial* que opera sobre todos y cada uno de los cuerpos materiales ni bien comienza su caída. Fue Galileo (1564-1642) quien precisó el concepto de esta importante magnitud física, que da cuenta de la resistencia que ofrece la materia cuando se la fuerza a cambiar su movimiento. La figura 1 muestra de qué manera interpretamos hoy el fenómeno de caída libre, admitiendo que, mientras el cuerpo cae, actúan sobre él, simultáneamente, dos fuerzas opuestas: la fuerza gravitacional (peso) que la Tierra ejerce sobre el cuerpo, $\boldsymbol{F}_G$, por una parte, y la fuerza de inercia,

$$\boldsymbol{F}_i = -m_i \boldsymbol{a} \qquad (1)$$

que compensa exactamente al peso, por otra parte.

Simbólicamente,

$$\boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_i = 0 \qquad (2)$$

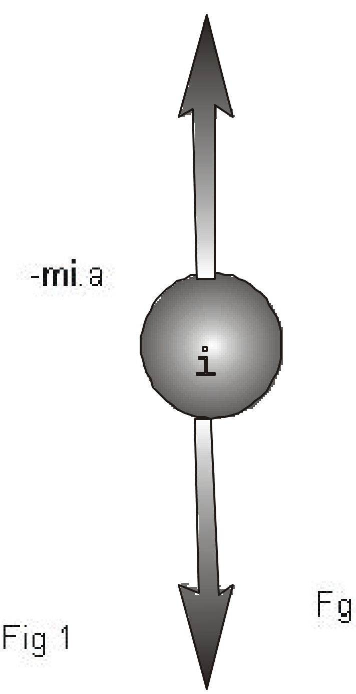


Fig 1

En la ecuación (1), m_i simboliza la *masa inercial* del cuerpo *i* en cuestión, y $\boldsymbol{a}$ la aceleración de caída libre, medida con relación a ejes fijos a la Tierra.

De acuerdo con Newton (1642-1727) la fuerza de interacción gravitacional entre la Tierra y el cuerpo de prueba, esto es, su peso, vale:

$$\boldsymbol{F}_G = - \left(\frac{m_{gT} \; m_{gj}}{r^2} \right) \hat{r} \qquad (3)$$

donde m_{gT} simboliza la *masa gravitatoria* de la Tierra; m_{gj} , la masa gravitatoria del cuerpo de prueba (considerado puntual); $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ es la distancia desde el centro de la Tierra (considerada esférica) al cuerpo de prueba y $\hat{r} = \boldsymbol{r}/r$,es el vector unitario que apunta desde el centro de la Tierra al punto material . Reemplazando las expresiones (1) y (3) en la igualdad (2) resulta, teniendo presente que la aceleración tiene la misma dirección, aunque sentido opuesto que $\boldsymbol{r}$,

$$a = \left(\frac{m_{gT}}{r^2} \right) \left(\frac{m_{gj}}{m_i} \right) \qquad (4)$$

Galileo, mediante una adecuada conjunción entre razonamiento y observación experimental, corrigió el error de Aristóteles al afirmar que *todos* los cuerpos, cualesquiera fuese su tamaño, forma y composición, caen *en el vacío* (esto es, eliminando las fuerzas de fricción debidas al aire) con *idéntica* aceleración. Esto significa, de acuerdo con (4), que el cociente entre ambas especies de masa se mantiene *invariante* cualesquiera sea el cuerpo en cuestión,

$$\frac{m_{gj}}{m_j} = \frac{m_{gk}}{m_k} = \cdots\cdots = constante \qquad (5)$$

Obviamente, el cociente (m_{gT}/r^2) mantiene el mismo valor para una localización terrestre dada.

El mismo Newton, empleando péndulos constituidos por sustancias de muy diferente naturaleza (tierra, hueso, agua, metales) comprobó la validez de la igualdad (5) con una incerteza cercana a una parte en mil.

Eötvos, a principios del presente siglo, redujo tal incerteza a una parte en 10^8 . Actualmente tenemos que $(m_{gj} - Cte.m_j\,)\,/m_{gj} < \pm\, 10^{-12}$, con lo que la proporcionalidad existente entre masa gravitacional y masa inercial representa una de las leyes físicas mejor verificadas.

Aunque Galileo y Newton pudieron corregir el error de Aristóteles, que perduró unos dos mil años, no pudieron explicar la *génesis* de la fuerza de inercia, $\boldsymbol{F}_i = - m_i\, \boldsymbol{a}$, capaz de emparejar la caída de cualquier cuerpo material.

2 NEWTON Y LA INERCIA

Las fuerzas de inercia tienen un carácter ciertamente desconcertante. Son las únicas fuerzas no apareadas (carecen de reacción, tanto en la dinámica newtoniana como en la einsteniana). Su existencia puede calificarse de efímera, ya que sólo se hacen presentes cuando un cuerpo es *forzado* a *cambiar* su velocidad. Piénsese, a modo de ejemplo, en una lámpara que pende del techo, sostenida por una cuerda (Figura 2).

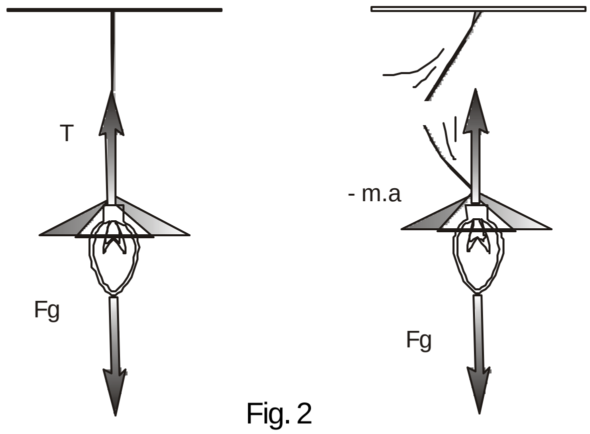


Fig. 2

La lámpara está, en todo momento, sometida a dos fuerzas iguales y opuestas: su peso, $\boldsymbol{F_G}$ y la tensión provista por la cuerda, $\boldsymbol{T}$, cumpliéndose $\boldsymbol{F_G} + \boldsymbol{T} = 0$. Se corta ahora la cuerda, con lo que desaparece la tensión provista por ésta. La lámpara cae acelerando hacia el piso y, *simultáneamente*, aparece sobre la misma la fuerza de inercia, $-m\boldsymbol{a}$, *en reemplazo* de $\boldsymbol{T}$, verificándose la igualdad (2) en todo instante.

Newton llamó *vis insita* a esta fuerza que parece *dormir* en el interior de la materia mientras ésta permanece en reposo, o bien si se mueve sin cambios en su velocidad (movimiento rectilíneo uniforme). Cuando merced a la acción de *agentes exteriores* al cuerpo, éste es forzado a *cambiar* su velocidad, entonces súbitamente *despierta* la vis ínsita, oponiéndose al movimiento. Newton, el científico más profundo y audaz de todos los tiempos, no podía eludir la crucial pregunta:

Cuál es la entidad que "reacciona" sobre cualquier cuerpo material, oponiéndose a su movimiento cuando, éste es acelerado?. Con relación a qué deben referirse las aceleraciones resultantes?

El célebre y ya clásico experimento del balde con agua en rotación (Figura 3) llevó al sabio inglés a introducir el concepto de *espacio absoluto*, entidad *anterior a* e *independiente de* toda materia del Universo. Al entrar en rotación la masa de agua, su superficie se torna cóncava por la acción de la fuerza centrífuga que sobre cada partícula de fluido actúa. Esta fuerza aparece, según Newton, sólo cuando la rotación es *verdadera*, es decir cuando tiene lugar con relación al espacio absoluto. Esto permitió a Newton distinguir las rotaciones verdaderas de las *aparentes* o *relativas* (aquellas debidas al movimiento de los cuerpos circundantes).

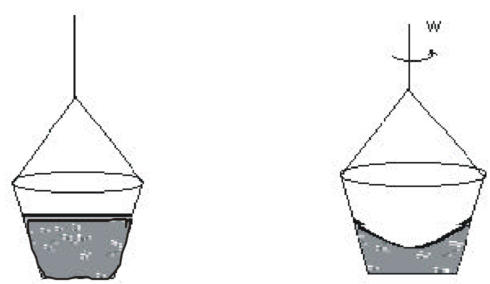


Fig. 3

Un ejemplo aclarará lo dicho: *Sabiendo que el diámetro ecuatorial de la Tierra es mayor que el polar se pregunta: ¿es la rotación del cielo de las estrellas fijas* (visión ptolomeica) *la responsable de la sucesión de los días y las noches? ¿O lo es acaso la rotación de la Tierra* (visión copernicana) *con relación a las estrellas fijas? Para Newton la respuesta es inmediata:*

La Tierra es la que rota, por cuanto el abultamiento ecuatorial se debe a la acción de las *fuerzas centrífugas* engendradas por la rotación *absoluta* de nuestro planeta. Para Newton, el movimiento de rotación del cielo de las estrellas fijas no ejerce fuerza centrífuga alguna sobre nuestro planeta. Evidentemente, la concepción newtoniana del espacio absoluto niega, desde el principio, la equivalencia entre las rotaciones cinemática y dinámica. Volviendo al ejemplo del balde de agua, la superficie del fluido se mantendría plana si fuese posible hacer rotar la totalidad del Universo, manteniendo a la vez aquél en reposo absoluto.

Las anteriores consideraciones revelan claramente que la aceleración que cuenta en la expresión de la segunda ley de la dinámica newtoniana, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, es la aceleración con relación al espacio absoluto. Aquí $\boldsymbol{F}$ simboliza la fuerza aplicada, mediante agentes exteriores, sobre la partícula de masa inercial m. En ausencia de acciones exteriores, $\boldsymbol{F} = m(d\boldsymbol{V}/dt) = 0$, resulta $\boldsymbol{V} =$ *constante* (ley de inercia de Galileo). $\boldsymbol{V}$ aquí representa, naturalmente, la *velocidad absoluta* de la partícula. Se ha convenido en llamar *sistemas inerciales* a todos aquellos en que la segunda ley de Newton se expresa en su forma más sencilla, como $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Adoptemos un sistema de referencia $S´\ (x´, y´, z´)$ que se mueve con la velocidad constante $\boldsymbol{V}_o$ con relación al sistema absoluto $S\ (x, y, z)$. La transformación de Galileo, $\boldsymbol{r}´ = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}_o t$ (Figura 4) permite afirmar que el referencial $S´$ es inercial dado que $d^2\boldsymbol{r}/dt^2 = d^2\boldsymbol{r}´/dt^2$ con lo que $\boldsymbol{a}´$ (la aceleración medida en $S´$) será coincidente con $\boldsymbol{a}$ (la aceleración absoluta). Admitiendo la invariancia de la masa inercial, hipótesis válida para velocidades mucho menores que la de la luz, la fuerza $\boldsymbol{F}´$, medida en un sistema inercial *cualesquiera* coincide con la fuerza *absoluta* $(\boldsymbol{F}´ = \boldsymbol{F})$. De este modo, la fuerza resulta ser *invariante* frente a cambios de sistemas referenciales inerciales. Aquí $\boldsymbol{r}$ fija la posición del punto material en el sistema S y $\boldsymbol{r}´$ fija la posición del mismo punto, *en el mismo instante*, con relación al sistema $S´$. Nótese que para Newton, el vector de posición absoluta, $\boldsymbol{r}$, tiene existencia real, aún cuando no sea accesible experimentalmente.

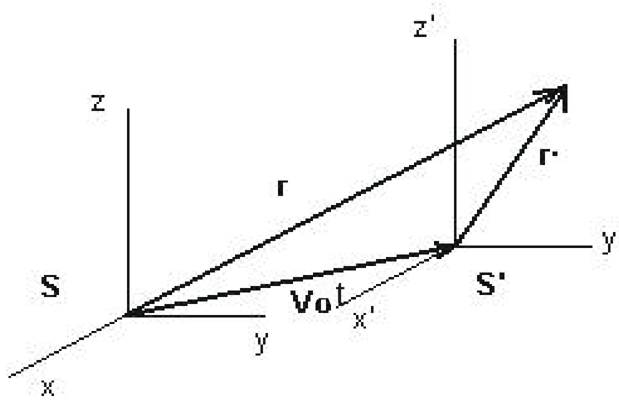


Fig 4

3 CRÍTICAS DE BERKELEY, LEIBNIZ Y MACH

Berkeley y Leibniz, contemporáneos de Newton, criticaron el concepto de espacio absoluto de Newton por su naturaleza metafísica. Para estos pensadores, el movimiento de un cuerpo material adquiere significación sólo cuando se lo vincula a otros cuerpos materiales. Por otra parte, resultaba muy poco satisfactorio para ellos tener que admitir la existencia de una *entidad inmaterial* capaz de actuar sobre la materia (engendrando fuerzas de inercia, cuando aquélla es acelerada) que, a la vez, no es susceptible de ser perturbada por la materia ponderable.

Hacia fines del pasado siglo, el físico y filósofo austríaco E. Mach (1838 – 1916) agudizó estas críticas puntualizando el hecho de que no existían, *a priori,* razones para que sistemas cinemáticamente equivalentes no lo fuesen también dinámicamente. Mach conocía que nuestro planeta es un buen sistema inercial cuando se consideran experimentos de breve duración , que ocurren en regiones de pequeña extensión espacial (deja de serlo para explicar la dinámica de los vientos, de los proyectiles de largo alcance, y del péndulo de Foucault, por dar sólo unos ejemplos.). También sabía que la *inercialidad* de los sistemas referenciales mejoraba notablemente al tomar ejes anclados en la materia distante del Universo (estrellas fijas en los días de Mach, galaxias distantes en la actualidad), en lugar de aquellos fijos a nuestro planeta.

Este hecho, y la notable proporcionalidad existente entre ambas especies de masa (gravitatoria e inercial) no podían ser consideradas por Mach como la manifestación de sucesos fortuitos. Por el contrario, tenían que ser consecuencia de una profunda, aunque hasta el momento ignorada, interconexión entre el Cosmos en su totalidad y cada uno de los cuerpos materiales.

Conducido por estas singulares realidades de la física experimental, Mach sugirió lo que hoy, con cierta vaguedad, se ha dado en llamar *Principio de Mach*. El mismo podría enunciarse de la siguiente manera: *Las fuerzas de inercia (-m**a*** de la segunda ley de Newton, *fuerza centrífuga, fuerza de Coriolis, etc.) se manifiestan, sobre cualquier cuerpo material, cuando éste experimenta cambios en su velocidad con relación a la totalidad de la materia que compone el Universo, tomado éste globalmente*.

Lo que Mach propone, en definitiva, es sustituir el metafísico espacio absoluto de Newton por un sistema de referencia físico, accesible por vía experimental, ligado a la totalidad de la materia que constituye el Universo

Debemos destacar, de paso, que tras el descubrimiento de la radiación cósmica de fondo (Penzias y Wilson, 1965), el sistema que promete hoy ser el mejor candidato a convertirse en el *referencial machiano,* Σ (X, Y, Z, τ), es aquél en el cual la radiación de microondas de 2,7ºK es isotrópica. Las anisotropías medidas se deben al efecto Doppler que tiene lugar por el hecho de moverse nuestro planeta, con relación a Σ , a unos cuatrocientos kilómetros por segundo.

Lamentablemente, Mach no fue capaz de volcar en un formalismo matemático convincente sus ideas, por lo que el principio que lleva su nombre pasó a ser, durante décadas, una de las tantas proposiciones de las cuales no puede afirmarse que sean ciertas o falsas. Ni siquiera aventuró Mach cuál podría ser la naturaleza de esta notable interacción de alcance cósmico.

Para ser viable una ligazón inercial partícula-cosmos, como la propuesta por Mach, es inevitable admitir la existencia de *acciones instantáneas a distancia*.

En efecto, atendiendo a las dimensiones del Universo conocido, de varios miles de millones de años luz, cualquier interacción que tuviese una velocidad finita de propagación no podría sustanciar, *sin retardo aparente*, la fuerza de inercia que aparece sobre la lámpara del apartado anterior, en el *mismo instante* en que se corta la cuerda que la sostiene del techo.

No todos los textos de mecánica dedican el énfasis necesario a estas cuestiones primordiales. Una remarcable excepción la constituye la obra: *Introducción al Estudio de la Mecánica, Materia y Ondas* , de U. Ingard y W. L. Kraushaar **(1)**. En las páginas 313, 314 del capítulo 11 de la citada obra se puede leer:

... Sólo recordaremos que la Tierra gira alrededor de su eje y tiene movimiento de traslación alrededor del Sol el cual, a su vez, gira alrededor del centro de la galaxia junto con las otras 10^{11} estrellas que la componen.

Tanto si nos gusta como si no, nos hallamos en uno de los sistemas de coordenadas en rotación más complicados y veremos que existen consecuencias observables muy importantes.

Esto plantea la delicada cuestión de qué queríamos significar. . . al decir alegremente que los observadores situados en la Tierra podíamos suponerlos en reposo.

Cuando consideramos todas estas rotaciones: ¿Es posible que un observador se halle en reposo?. Si es así, ¿Con relación a qué lo está?

Las respuestas a estas preguntas no se conocen, o al menos no han tenido aceptación general... Tal vez, el último sistema inercial esté fijo respecto al centro de masa de todas las estrellas del universo. (subrayado nuestro).

4 LA INERCIA Y SU POSIBLE ORIGEN GRAVITACIONAL

Varios intentos se hicieron, desde las postrimerías del pasado siglo hasta nuestros días para implementar las ideas de Mach, comenzando por los hermanos Friedlander en 1896.

Naturalmente, el tema interesó a pensadores de la talla de Einstein, Schrödinger, y muchos otros. Para una detallada reseña histórica de estos trabajos remitimos al lector a la notable obra del físico brasileño Andrè Koch T. Assis **(2)**, titulada *Mecánica Relacional* (1999**)**. Dicha obra está llamada a tener, en nuestra opinión, una repercusión mundial comparable con la que en su momento tuvieron los perennes ***Principia*** de Newton.

En el mencionado libro Assis, tras hacer una crítica exhaustiva de las mecánicas newtoniana y einsteniana, desarrolla minuciosamente la implementación positiva del principio de Mach, hecho ya sucintamente adelantado por el mismo autor en 1989, en la prestigiosa *Foundations of Physics Letters* **(3)**.

Assis logra, por vez primera, *explicar* el origen de la inercia y *justificar* porqué la materia distante del Universo, tomada en su conjunto, constituye el mejor de los sistemas inerciales conocidos.

Comienza Assis por admitir que la inercia tiene un origen gravitacional, con lo que ya da un paso importante sobre la obra de Mach. Para lograr su cometido, se vale de una ley de fuerzas similar a la que exitosamente formulara W. Weber (1804 – 1891), a mediados del pasado siglo, con la intención de unificar los fenómenos electrodinámicos hasta entonces conocidos.

Dedicaremos el siguiente parágrafo a presentar y comentar algunas de las propiedades salientes de la ley de fuerzas de Weber.

5 LEY DE FUERZAS DE WEBER

W. Weber se propuso ampliar la ley de fuerzas entre cargas eléctricas de Coulomb-Priestley, para dar cabida a los ya conocidos fenómenos electrodinámicos (fuerzas entre corrientes, e inducción electromotriz). Dado que en la anterior ley la única variable espacial considerada es la *distancia* entre cargas, Weber introdujo también la velocidad con que esta distancia *cambia* en el transcurso del tiempo, $\dot{r}_{ij} \equiv dr_{ij}/dt$ (velocidad *radial* relativa). También incluyó su derivada temporal, $\ddot{r}_{ij} = d(\dot{r}_{ij})/dt$ (aceleración radial relativa), obteniendo así (1846) la expresión:

$$\boldsymbol{F}_{ji} = \left(\frac{q_i\, q_j}{4\, p\, e_0}\right)\left(\frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2}\right)\left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2\, c^2} + \frac{r_{ij}\, \ddot{r}_{ij}}{c^2}\right) \qquad (6)$$

Donde $\boldsymbol{F}_{ji}$ es la fuerza que la carga eléctrica q_j ejerce sobre q_i ; siendo $\hat{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij} / r_{ij}$ el vector unitario que apunta desde q_j a q_i . (Figura5). La distancia, que *en el instante* considerado, separa ambas cargas viene dada por:

$r_{ij} = [\ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2\ ]^{1/2}.$

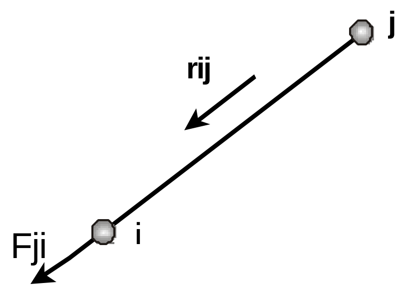


Fig. 5

En la fórmula (6), c es la medida de la velocidad de la luz en el vacío y $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ unidades MKSA (SI).

Como se advierte inmediatamente la fuerza de Weber satisface la tercera ley de Newton , $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ de acción y reacción, en su forma fuerte (fuerzas colineales, iguales y opuestas). Una característica notable de esta expresión es su carácter enteramente *relacional* . Esto significa que dicha expresión no depende del sistema de referencia empleado al medir las cantidades en ella involucradas.

Como es evidente, $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ es independiente del sistema de referencia arbitrariamente escogido, propiedad que no satisfacen $\boldsymbol{r}_i$ y $\boldsymbol{r}_j$. Puede demostrarse que otro tanto ocurre con las cantidades r_{ij} , $\hat{r}_{ij}$, $\dot{r}_{ij}$ y $\ddot{r}_{ij}$, que resultan ser *invariantes* frente a cambios de sistemas de referencia, sean estos inerciales o no (**Ap.1**).

El término *relacional*, que en rigor significa *absolutamente relativista*, fue introducido por Assis (1989) para no dar lugar a confusiones con las teorías relativistas de Einstein **(2)**.

Es lamentable que la ley de Weber no haya tenido la merecida difusión, ya que no figura en los libros de texto de electromagnetismo con los que habitualmente se forman científicos y estudiosos. Es posible que haya contribuido a esta lamentable omisión el rechazo que hacia la misma manifestó H. Von Helmholtz, reconocido referente de la física germana, contemporáneo de Weber.

Helmholtz sostenía, erróneamente, que dicha fuerza no satisface la conservación de la energía . Tiempo después el mismo Weber demostró que la ecuación (6) está en perfecto acuerdo con la conservación de la energía (**Ap.2**). Es más, en 1848 Weber presentó la función de energía potencial (energía de interacción mutua) de la que es posible deducir esta fuerza. Resulta curioso advertir que el error de Helmholtz se repite, contemporáneamente, en el magistral tratado de Mecánica de H. Goldstein **(4)**. En rigor, la fuerza de Weber es deducible a partir de la función potencial ($F_{ji} = -\nabla U_{ij}$) dada por:

$$U_{ij} = \left(\frac{q_i\, q_j}{4\pi\, \varepsilon_0\, r_{ij}} \right) \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2\, c^2} \right) \qquad (7)$$

Aquí U_{ij} simboliza la energía consumida para vencer la fuerza de Weber, al traer las cargas desde el infinito, donde inicialmente se encontraban en reposo relativo. Ahora las mismas se encuentran separadas por la distancia r_{ij} , con la velocidad (radial) relativa $\dot{r}_{ij}$.

Cumplimentando el principio de acción-reacción, la fuerza de Weber satisface, automáticamente, los teoremas de conservación del momento lineal y del momento angular.

Un completo desarrollo de la electrodinámica de Weber, que incluye comentarios de Maxwell y ofrece una mejor comprensión de la generación unipolar **(5,6)**, puede consultarse en **(7,8)**.

6 FUERZA GRAVITACIONAL DE WEBER-ASSIS

En su trabajo pionero **(3)** de 1989 Assis comienza por enunciar tres principios, de los que solo los dos primeros resultan enteramente obvios:

(a) La fuerza es una cantidad vectorial.

(b) La fuerza que un cuerpo material A ejerce sobre un cuerpo material B es igual y opuesta a la que B ejerce sobre A.

(c) La suma de todas las fuerzas sobre cualquier cuerpo material es cero.

Seguidamente escribe, para la fuerza gravitacional entre los puntos materiales i, j, la expresión:

$$\boldsymbol{F}_{ji} = \kappa\left(\frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^{2}}\right)\left(1-\frac{\xi\,\dot{r}_{ij}^{2}}{2\,c^{2}}+\frac{\xi\,r_{ij}\,\ddot{r}_{ij}}{c^{2}}\right) \qquad (8)$$

En la que $\kappa = - H_g\, m_i m_j$; $\xi = 6$. ; siendo H_g es una constante dimensionada.

En el mencionado trabajo Assis, no especifica si las masas involucradas son gravitacionales o inerciales, aunque en posteriores escritos admite que está operando con masas gravitatorias **(2, 7, 9, 10)**, pues son éstas las responsables de la interacción.

Curiosamente, Assis escribe **(2)**, $\kappa = - G\; m_i\; m_j$, con lo que las masas involucradas son, a pesar de su intención, inerciales antes que gravitatorias.

Para subsanar este inconveniente formal basta recordar que, aunque no siempre se lo reconozca debidamente, dos son las leyes, *independientes entre sí*, de la gravitación newtoniana: las dadas por las ecuaciones 3 y 5 del primer parágrafo **(11, 12)**.

Se admite, por otra parte, que la fuerza gravitatoria *no* depende de la composición del medio interpuesto entre los cuerpos en interacción **(1)**, hecho que la distingue definidamente de la interacción eléctrica. Esta situación hace que no haya necesidad de introducir en la fórmula (3) ni en la (8) ninguna constante, sea ésta dimensional o no. En otros términos, estando ya definidas las unidades con que han de medirse las otras magnitudes, fuerza y distancia en el caso que nos ocupa, la ecuación (3) permite *definir* la unidad de masa gravitatoria en cualquier sistema de unidades *coherente* **(12)**.

La unidad en el sistema MKS será, por consiguiente, aquella masa gravitatoria contenida en un cuerpo puntual que, al ser colocado a un metro de otro idéntico, da lugar a la fuerza gravitatoria de 1 newton.

Por otra parte, la ecuación (5) permite escribir

$$m_{gj} = \sqrt{G}\; m_i \qquad (9)$$

en la que G es una constante universal, cuya medida resulta ser: $(6{,}67 \pm 0{,}05)\mathrm{x}10^{-11}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{kg.s}^2$. Nótese, una vez más, que el kilogramo que aparece en la anterior expresión es la unidad de masa inercial, la misma que se encuentra archivada en París. Volviendo a la masa gravitatoria, su unidad estará materializada, en virtud de la expresión (9), en cualquier cuerpo que tenga $1/\sqrt{G}$ unidades de masa inercial, esto es, algo más de 100 toneladas.

La notable ecuación (9) permite reemplazar la masa gravitatoria de todas las ecuaciones de la dinámica newtoniana en que ella aparece. En particular, la ley de Newton adquiere la familiar forma $F = (G\ m_i\ m_j)/r^2$, que aparece en todos los libros de texto. Incidentalmente, recordamos que la medición de la constante universal de la gravitación sólo fue realizada mucho tiempo después de ocurrida la desaparición de Newton.

Al poner $\kappa = -G\ m_i\ m_j$, Assis incorpora, *ab initio,* la constante universal de la gravitación, nexo entre ambas especies de masa. Esta constante universal *debe* ser deducida, adoptando un enfoque machiano, en términos de magnitudes cosmológicas.

En definitiva, si bien la teoría de Assis es física y matemáticamente irrepochable, se debe perfeccionar desde un punto de vista dimensional.

El análisis que acabamos de esbozar, lejos de ser trivial, es esencial al desarrollar cualquier teoría susceptible de ser expresada en términos matemáticos. Para poder afirmar que dos cantidades son iguales es preciso que *sus efectos* sean iguales (**Ap.3**).

Un sencillo ejemplo clarificará lo antes dicho: la energía cinética media de un gas monoatómico perfecto, < E >, depende linealmente de la temperatura absoluta, de modo que para el mismo gas, considerado a dos temperaturas diferentes, T, T´, se cumplirá < E >/T = < E´ >/T´ = constante (compárese con la ecuación 5).

La vinculación entre estas dos propiedades físicas, *epistémicamente diferentes*, se logra experimentalmente merced a la constante de Boltzmann. Resulta de este modo, <E> = 3kT/2, con k = $1{,}38\times10^{-16}$ erg/ºK. Si se desea hacer coincidir la *medida* de la energía media del gas con la *medida* de su temperatura absoluta, habría que emplear un nuevo sistema de unidades en el que por lo menos una de las unidades básicas (el ergio o el grado) debe ser modificada **(Ap.3)**. Esta arbitraria elección no debe hacer creer que energía y temperatura pasan a ser la misma cosa. Basta recordar que la termodinámica sólo cobró verdadero ímpetu cuando se aprendió a diferenciar claramente los conceptos de calor (energía) y temperatura.

Para más pormenores sobre estos delicados temas aconsejamos enfáticamente el magistral tratado, aún no superado, *Análisis Dimensional*, de Julio Palacios **(12).** En el mismo, a partir del concepto vectorial de *dimensión*, genialmente intuido por Jean B. Fourier, se desarrolla una teoría inteligible y rigurosa de las magnitudes físicas (**Ap.3**).

7 IMPLEMENTACIÓN DEL PRINCIPIO DE MACH

Nos valdremos ahora de los razonamientos que condujeron a Assis a la implementación de las ideas de Mach teniendo presentes las consideraciones dimensionales expuestas en este trabajo.

En primer lugar, advertimos que la fuerza (8) tiene asociada una energía potencial dada por la expresión,

$$U_{ij} = -\left(\frac{m_{gi}\ m_{gj}}{r_{ij}}\right)\left(1 - \frac{x\ \ddot{r}_{ij}^2}{2\ c^2}\right) \qquad (10)$$

de la que inmediatamente se deduce, (Ap.2),

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{r}_{ij}\left(\frac{dU_{ij}}{dr_{ij}}\right) \qquad (11)$$

Aplicaremos ahora la expresión (10) para calcular la energía de interacción gravitacional entre una cáscara material esférica, de radio R, espesor dR, densidad de masa gravitatoria $\rho_g(R)$, centrada en un sistema de referencia arbitrario $S\ (x,\ y,\ z)$ y una partícula de prueba puntual. La misma tiene una masa gravitatoria m_{gj} y está localizada en $\boldsymbol{r}_i$ con relación al origen de S, dotada además de la velocidad $\boldsymbol{v}_i(t)$ con relación a S (figura 6). Supondremos, para no complicar innecesariamente los cálculos, que la cáscara esférica se encuentra en reposo rotacional con relación a S. No es difícil generalizar estos resultados al caso más general en el cual la cáscara gira, con relación a S, como oportunamente lo hizo Assis **(2, 3, 7, 13)**.

La energía gravitacional mutua entre la partícula i y la materia, con una densidad de masa gravitatoria $\rho_g(R)$, contenida en el elemento de volumen dV (que en coordenadas polares toma la forma $R^2 sen\theta\, dR d\theta\, d\varphi = R^2 dR d\Omega$.) vale:

$$d^3U = -m_{gi}\ [\ \rho_g(R)R^2dR\ ]\ [d\Omega[\frac{1}{r_{ic}} - \frac{\xi}{2\,c^2\,r_{ic}^3}(\boldsymbol{r}_{ic}\,\boldsymbol{v}_i)^2]\ ]$$

Las integraciones angulares (**Ap.4**) conducen a:

$$dU = -4\pi\ m_{gi}\left[R\ \rho_g(R)\,dR\right]\left(1 - \frac{\xi\ v_i^2}{6\,c^2}\right)$$

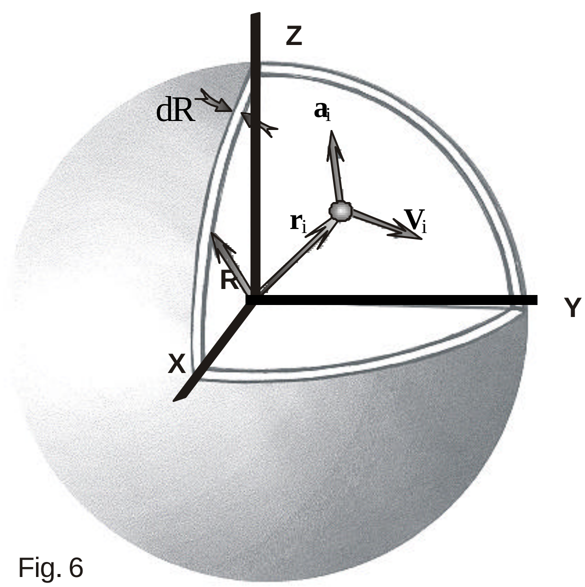


Fig. 6

Recordando (**Ap.2**) que $-\ \boldsymbol{F}_{ci}\ .\boldsymbol{v}_{ic} = dU/dt$ y teniendo en cuenta que $v_i^2 = \boldsymbol{v}_i\ .\boldsymbol{v}_i$, obtenemos la fuerza gravitacional que el cascarón de materia ejerce sobre la partícula de prueba, cuando ésta es acelerada con relación a aquél:

$$d\boldsymbol{F}_{ci} = -\left(\frac{4\pi\ \xi}{3\,c^2}\right)m_{gi}\ \ [R\rho_g(R)dR]\ (d\boldsymbol{v}_i/dt) \qquad (12)$$

Puntualiza Assis **(2, 3, 7),** que el Universo es remarcablemente isotrópico (esto como resultado del análisis de distintos tipos de radiación observable), y dado que la Tierra no ocupa un lugar central en aquél, es posible hablar de una homogeneidad espacial sobre una escala muy grande. Esto es, $r_g(R) = r_{go}$ = constante.

Con esta consideración, podemos integrar la ecuación (12) hasta un radio característico del universo conocido, dado por la ley de Hubble, $c = H_o R$. Con esto resulta, para la fuerza inercial que la totalidad del Universo ejerce sobre la partícula de prueba acelerada,

$$\boldsymbol{F}_{Ui} = - \ \Phi m_{gi} \boldsymbol{a}_i \equiv - m_i \boldsymbol{a}_i \qquad (13)$$

donde hemos *definido* la masa inercial, m_i, de la partícula de prueba, como:

$$m_i \equiv \Phi \, m_{gi} \qquad (14)$$

Siendo

$$\Phi \equiv \left(\frac{4 p \ x}{3 c^2} \right) \int_0^{c/H_0} r_{go} \ R \ dR = \left(\frac{2 p \ x \ r_{go}}{3 H_0^2} \right) \qquad (15)$$

Como la ecuación (14) también debe vincular ambas densidades de masa, tendremos $r_o = \Phi \, r_{go}$ por lo tanto, teniendo en cuenta (14) y (15), podemos expresar Φ en función de la densidad de masa inercial, r_o,

$$\Phi = \left(\frac{2 p \ x \ r_0}{3 H_0^2} \right)^{1/2} \qquad (16)$$

reemplazando (16) en (14) resulta, recordando (9),

$$G = \frac{3 H_0^2}{2 p \ x \ r_0} \qquad (17)$$

La ecuación (13) nos dice que cuando el cuerpo de prueba, *merced a la acción de fuerzas exteriores*, ***F*,** (sean estas de origen gravitacional, eléctrico, elástico, nuclear, de contacto, etc.), experimenta la aceleración $\boldsymbol{a}_i = d\boldsymbol{v}_i/dt$, *la totalidad de la materia* que compone el Universo *reacciona* inercialmente. De esta manera trata de *oponerse* a dicha aceleración. El postulado c (parágrafo 6) permite escribir $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ui} = 0$. Esto equivale a escribir: $\boldsymbol{F} = m_i \boldsymbol{a}_i$ que es, precisamente, la segunda ley de movimiento de Newton, con lo cual la masa inercial cobra ahora nueva significación: se trata de una propiedad *mixta*, con una componente local, intrínseca, que es la masa gravitatoria (similar a la carga eléctrica en este aspecto) y componentes *no locales*, como lo son la *densidad de materia cósmica* y una *longitud característica* del Universo. Las ecuaciones (14) y (16) conducen a:

$$m_i = \left(\frac{2 p \ x \ r_0}{3 H_0^2} \right)^{1/2} m_{gi} \qquad (18)$$

La ecuación (17) expresa una notable ligazón entre tres magnitudes, hasta ahora consideradas independientes entre sí. Esto es una consecuencia directa de la implementación del principio de Mach. Se sabe que es aproximadamente válida (con x comprendido entre 1 y 20) desde que Dirac especuló (sobre consideraciones numerológicas antes que atendiendo al principio de Mach) acerca de la posible vinculación entre la constante gravitacional y propiedades características del Universo, considerado éste en gran escala. La cantidad $r_o / H_o^2 \approx 10^8$ kg.s^2/m^3 no se conoce aún con suficiente exactitud debido a limitaciones experimentales actuales.

El parámetro ξ debe determinarse empíricamente. Resolviendo las ecuaciones de movimiento planetario según la fuerza dada por (8) resulta **(2),** al comparar con mediciones astronómicas, ξ = 6.

8 ALGUNAS CONSECUENCIAS NOTABLES

Analizaremos ahora el conocido problema de la caída libre, en el marco de la Mecánica Relacional. Recordando las ecuaciones (2), (3), (13) y (18) tendremos, para un cuerpo de prueba cualquiera, denominado 1, que cae libremente,

$$\left(\frac{m_{gT}\, m_{g1}}{r^2} \right) = m_{g1} \left(\frac{2\, p\ x\ r_0}{3\, H_0^2} \right)^{1/2} a$$

De la que se infiere que, si se duplicase la densidad de masa inercial del universo ($r_o' = 2r_o$) la aceleración de caída libre se haría $a' = a/\sqrt{2}$. Esto es, valdría unos 6,9 m/s^2, en lugar de los 9,8m/s^2 actuales. Esta consecuencia, desde luego, no hubiese aparecido en la dinámica newtoniana, dado que en su formulación (al igual que en la relativista) la materia distante no fue incluída en sus fundamentos. Nótese que si lo que se duplica es la densidad de masa gravitatoria del universo (esto es, si se duplica el número de galaxias),entonces la aceleración de caída libre quedaría reducida a la mitad (ecuación 15).

Otra consecuencia notable de esta nueva dinámica es que en ella, las fuerzas de inercia (- $m\,\boldsymbol{a}$, de Coriolis, centrífuga) deben considerarse reales, antes que ficticias. Recuérdese que tal calificativo proviene, tanto en las dinámicas newtoniana como einsteniana, por el hecho de no considerarse a éstas como *fuerzas de interacción*. Es decir, resultaba imposible identificar cuerpos materiales, causantes de tales fuerzas, sobre los que tuviese lugar la *reacción* de las de inercia. Las denominadas ficticias, no podían satisfacer la tercera ley de Newton (acción-reacción). El nuevo enfoque, por el contrario, restituye el carácter de *real* a tales fuerzas. Son también fuerzas de interacción, entre la materia local acelerada y la totalidad de la materia universal. La reacción a las mismas está distribuida, por consiguiente, en toda la materia del cosmos.

Destacamos que el calificativo *ficticias*, aplicado a las fuerzas de inercia, nunca resultó enteramente satisfactorio, precisamente por referirse tan sólo a un aspecto de tales fuerzas (la supuesta inexistencia de una interacción responsable de las mismas). Así, a la hora de computar la energía consumida para vencerlas, resultaban ser tan reales como cualquier fuerza ordinaria de interacción. Para llevar un cuerpo desde el ecuador a uno de los polos es menester gastar la energía necesaria para vencer la fuerza centrífuga generada por la rotación terrestre con relación al resto del Universo, hecho que tiene su interés al considerar procedimientos de sincronización de cronómetros atómicos **(14).**

Desde el punto de vista filosófico, finalmente, el marco provisto por esta nueva mecánica permite aventar, definitivamente, el viejo fantasma de espacio absoluto newtoniano, entidad metafísica enteramente superflua para el desarrollo de cualquier teoría que se ocupe de las interacciones entre cuerpos materiales.

9 ERWIN SCHRÖDINGER, UN PIONERO

Schrödinger, universalmente reconocido por haber desarrollado la versión ondulatoria de la Mecánica Cuántica, escribió un notable, aunque poco conocido, artículo en los célebres *Annalen der Physik* (1925), en el que se propuso implementar el principio de Mach **(15)**. En primer lugar realizó una crítica de la mecánica clásica, puntualizando que sus fundamentos no podían dar explicación alguna al conocido hecho de que los mejores sistemas de referencia inerciales resultan ser aquellos anclados a las estrellas fijas. O, en su defecto, los que tienen, en relación a aquéllas, una traslación uniforme.

Agrega luego que tampoco la teoría general de la relatividad satisface las exigencias de Mach. Refiriéndose a la precesión de la órbita de Mercurio, calculada por dicha teoría con asombrosa precisión, se pregunta (traducción libre):

¿Con respecto a qué, de acuerdo con la teoría, tiene lugar tal precesión?. Se sabe, empíricamente, que la misma ocurre con relación a las estrellas fijas, circunstancia sobre la que nada puede decir la aludida teoría, por el simple hecho de que la materia distante no está incluída en tales cálculos ....Quizás resulte de interés indagar si la vinculación de los sistemas inerciales con la materia distante no pueda hacerse mediante una simple modificación de la mecánica clásica ...

La expresión de la energía potencial newtoniana ya satisface las exigencias de Mach. Esto es así porque ella sólo depende de la separación entre las partículas y no de su posición absoluta en el espacio... La situación es diferente cuando hablamos de la energía cinética... que viene determinada por el movimiento absoluto en el espacio, siendo que, en principio, sólo separaciones (distancias) relativas y cambios de tales distancias son observables. Sería, por consiguiente, deseable expresar la energía de interacción mutua de dos masas puntuales sólo en términos de la separación entre ellas y de la velocidad de cambio de la misma...

Selecciona luego, Schrödinger, valiéndose de consideraciones heurísticas, una de entre numerosas expresiones posibles,

$$W = g\ \frac{m\,m'\,\dot{r}^2}{r} - \frac{m\,m'}{r}$$

Agregando,

...las masas son aquí medidas en una unidad tal que la constante gravitacional vale 1. La constante g *, en principio indeterminada, resulta valer 3/c*^{2} *, como luego veremos.*

Considera luego, con el auxilio de la anterior expresión, la interacción entre una masa puntual, moviéndose en las cercanías del centro (subrayado nuestro) de una esfera hueca de radio R, provista de una densidad superficial de masa (gravitatoria) σ, obteniendo así la energía mutua gravitacional. Esta última resulta ser *exactamente igual* a la energía cinética de la Mecánica Clásica con la condición de que la masa usual (inercial) venga dada por:

$$m = \left(\frac{8\pi\, g\ \sigma\ R}{3}\right) m$$

Compárese esta igualdad con la expresión dada por (14).

Luego integra el resultado de la cáscara esférica para un "universo" de radio R_o. Agrega que si se toman como densidad y radio los valores correspondientes a nuestra galaxia, entonces la constante gravitacional sería 10^{11} veces menor que la realmente medida. Concluye entonces que la inercia de los cuerpos del sistema solar se debe, principalmente, a la presencia de materia extremadamente lejana. La existencia de galaxias externas había sido recientemente descubierta por Hubble. Hasta entonces muchos creían que el Universo se limitaba a nuestra galaxia.

Analiza luego, Schrödinger, cómo la nueva energía de interacción modifica el movimiento planetario, explicando la precesión de las órbitas planetarias. Al buscar la concordancia entre el cálculo y la observación astronómica encuentra el valor de γ dado más arriba.

Continúa luego con interesantes consideraciones cosmológicas que no comentaremos aquí.

10 UNIVERSO INFINITO

Es fácil comprender que en un universo infinito, sin límites, el potencial newtoniano y su ampliación weberiana, ecuación (10) son indefinidos (2, 9). Esto significa que se pueden obtener diferentes valores para la fuerza, dependiendo éstos del lugar del espacio elegido para efectuar las integraciones. Como es patente, esta situación no es deseable y, para remediarla, la manera más natural es introducir un término exponencial en la expresión de la energía mutua de interacción. El primero en introducir un término de esta naturaleza fue Laplace (1880), aunque lo hizo en la función fuerza.

Es fácil rehacer las operaciones efectuadas en el parágrafo 7 cambiando la energía (10) por $U_{ij}' = U_{ij}\exp(-\alpha r)$, donde α es una magnitud característica del Universo. Integrando ahora la ecuación (12) hasta infinito (2, 9) resulta:

$$G = 3 H_o^2/(4 \pi \xi \rho_o),$$

esto es, la mitad del valor dado por la ecuación (17). El nuevo cálculo, con $\xi = 6$ da, para la constante gravitacional, un valor cercano a 4/3 del valor experimental.

11 MISCELÁNEAS Y CURIOSIDADES HISTÓRICAS

Obsérvese que la energía de interacción provista por Schrödinger resulta ser *exactamente* igual a la energía de Weber-Assis dada por la expresión (10) con $\chi = 6$. Resulta curioso que siendo Schrödinger un científico de habla germana y de vastísima cultura, en ningún momento haga referencia a la obra de Weber.

Cuando Assis escribió su primer trabajo (1989) tampoco conocía el artículo de Schrödinger, trabajo éste que puede considerarse como precursor de la implementación positiva del principio de Mach. El tratamiento de Assis, además de ser más completo (considera, desde un principio, la interacción entre la partícula acelerada y un cascarón material en rotación), resulta más riguroso. Nótese que Schrödinger, sin necesidad alguna, restringe su planteo al particularísimo caso en que el cuerpo móvil se encuentra en las proximidades del centro de la esfera. Esto significaría aceptar la enteramente improbable situación en que la Tierra estuviese en el centro del Universo.

Otro apreciable avance propio de la formulación de Assis consiste en haber enunciado claramente su postulado c (parágrafo 6) y el haber sido capaz de escindir las posibles fuerzas actuando sobre cualquier partícula material en dos categorías:

a) Las provistas por interacción del cuerpo de prueba con la materia isotrópicamente distribuida en todo el Universo.

b) Las provistas por interacciones locales (gravitatorias, elásticas, electromagnéticas, nucleares, de contacto, ...) sumadas a las debidas a distribuciones *no isotrópicas* de materia, como lo son el Sol, la Luna, y nuestra galaxia.

La formulación de Schrödinger provee, por primera vez, el nexo entre masa gravitatoria y masa inercial característica de toda formulación machiana.

Destacamos que Schrödinger expresa su función potencial en términos de masas gravitatorias, como hicimos en nuestro tratamiento. Esta vinculación entre ambas especies de masas resulta menos nítida en la formulación de Assis. Esto es debido a que, al introducir *a priori* la constante de gravitación, al integrar (10) para el sistema partícula-cáscara, llega a la expresión $\Phi = (2\ \pi\ \xi\ G\ r_o/3H_o^2)$, en lugar de la (15). De este modo, al comparar la expresión (13) con la segunda ley de Newton debe Assis hacer $\Phi = 1$, adimensional, con lo que las medidas (y las unidades) de ambas especies de masa resultan ser idénticas.

También Einstein puntualizó el hecho de que la manera más simple de realizar el objetivo de la teoría de la relatividad sería formular las leyes de un modo tal que aparezcan, desde un principio, tan sólo distancias relativas y velocidades relativas. Luego sentenció que tal ruta era imposible de seguir **(2)**. Einstein no menciona en ninguno de sus escritos la fuerza de Weber, que sin duda debía conocer.

Tampoco Mach, consumado mecanicista, entrevió la posibilidad de emplear una formulación weberiana para implementar sus ideas.

Palacios, que supo establecer una clara diferenciación entre las masas gravitatoria e inercial, quizás demasiado atado al concepto de campo, tampoco intentó valerse de la fuerza de Weber para describir la interacción gravitacional.

La energía potencial dada por la ecuación (7) es, evidentemente, una expresión límite, válida sólo en el dominio de las bajas velocidades, en comparación con la de la luz en el vacío. Recientemente ha sido modificada por Phipps **(16)**, con lo que se supera la anterior limitación.

También para la energía gravitacional mutua se han propuesto expresiones que satisfacen el límite de altas velocidades **(15, 17)**.

El carácter *no local* del principio de Mach, que requiere de acciones a distancia instantáneas **(18, 19)**, es sin duda ajeno al sentido común dado que estamos acostumbrados a pensar en términos de velocidades de propagación. De todos modos, la inexistencia de un fenómeno tal como el de la aberración en óptica condujo a Laplace a estimar la velocidad de propagación de la interacción gravitatoria en varios miles de millones de veces la velocidad de la luz.

La visión holística de Mach contrasta con la concepción local de Aristóteles, quien creía que los cuerpos se mueven por su *propia virtud*, como si buscasen el lugar que les está indicado por su propia naturaleza. De algo que es evidente se dice, aún en nuestros días, que *cae por su propio peso.*

La teoría aquí esbozada puede calificarse de *fenomenológica* por cuanto se ocupa de la descripción de los fenómenos sin buscar causas últimas. En tal sentido, debe considerarse legítimamente, como una extensión de la doctrina newtoniana *(hipótesis non fingo)*.

Es altamente probable que las modernas investigaciones (espacios no euclidianos, cuerdas, supercuerdas, gravitones, neutrinos, etc.) arrojen luz, en un futuro próximo, sobre la singular naturaleza de la inercia. Ocurrirá entonces algo similar a lo que tuvo lugar cuando la teoría molecular de la materia permitió comprender el origen de la presión de un gas. Esta última es una variable macroscópica que interviene, junto con la temperatura, el volumen y el número de partículas, en una ley fenomenológica (ecuación de estado del gas). La teoría molecular reconoce que el gas esta constituido por enorme cantidad de partículas, en incesante movimiento. La presión resulta ser, entonces, consecuencia de los numerosísimos choques de estas partículas contra las paredes de recipiente que las contiene.

No sólo en el contexto aquí desarrollado se recurre a modelos holísticos. También en el dominio de la microfísica ha resultado fértil introducir la noción de *campo residual de punto cero* pues con el mismo se logra comprender ciertas consecuencias notables y poco intuitivas de la teoría cuántica **(20, 21, 22)**.

La implementación del Principio de Mach jerarquiza a la masa gravitatoria como magnitud primaria, tan fundamental en este enfoque como lo es la carga eléctrica en electromagnetismo. Es por ello que amerita dotar de nombre propio a sus más usuales unidades, es decir, las correspondientes a los sistemas cgs y MKS.

Sugerimos los nombres de Schrödinger y de Palacios, espectivamente, para ellas.

Deseamos cerrar este ensayo puntualizando que la teoría expuesta, al igual que cualquier otra teoría, debe, para adquirir jerarquía de doctrina, superar exitosamente la confrontación con el experimento. Al respecto mencionaremos una consecuencia de la teoría de Mach-Weber-Assis, no prevista por la Mecánica Newtoniana. Según vimos, las fuerzas inerciales deben su existencia a la rotación relativa entre un cuerpo y la materia circundante. De este modo, un cascarón material de radio R, espesor dR, con densidad de masa ρ, girando con la velocidad angular ω, generará una fuerza centrífuga sobre una partícula estacionaria localizada en el interior de la esfera. Tal fuerza vale

$$F = (4\pi\, \xi\, G/3c^2) m\, \rho\, R dR\, \omega^2 r$$

donde m es la masa de la partícula de prueba, localizada a la distancia r del eje de rotación (10).

Para cuerpos y velocidades de rotación ordinarios esta fuerza es pequeñísima. No obstante, tiene un valor diferente de cero con lo que, empleando técnicas experimentales de alta sensibilidad, podrá medirse en el futuro.

Apéndice 1

Tanto aquí como en el resto del texto, las letras escritas en negrita representan vectores.

1.1

$$\dot{r}_{ij} = \frac{dr_{ij}}{dt} = \frac{x_{ij}\ \dot{x}_{ij} + y_{ij}\ \dot{y}_{ij} + z_{ij}\ \dot{z}_{ij}}{r_{ij}} = \hat{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_{ij}$$

1.2 Sean dos sistemas de referencia S, S', con orígenes en **O**, **O'**. En el instante ***t*****,** **O'** está localizado en $\boldsymbol{R}$ en relación a **O**, moviéndose, con relación a este punto, con una velocidad $\boldsymbol{V} = d\boldsymbol{R}/dt$. Además **S'** esta rotando, en relación a **S**, con una velocidad angular **w.** Si $\boldsymbol{A_t} \neq \mathbf{0}$ ó $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ entonces al menos uno de estos sistemas es no inercial.

$\boldsymbol{r_j}$ fija la posición de la partícula en **S**. fija la posición de la misma partícula en **S'**. Ambos vectores ligados por las ecuaciones :

$$\boldsymbol{r_j} = \boldsymbol{r'_j} + \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{v_j} = \boldsymbol{v'_j} + \mathbf{w} \times \boldsymbol{r'_j} + \boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{a_j} = \boldsymbol{a'_j} + \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{r'_j}) + 2\mathbf{w} \times \boldsymbol{v'_j} + d\mathbf{w}/dt \times \boldsymbol{r'_j} + \boldsymbol{A_t}$$

Resulta inmediato que

$$\boldsymbol{r_{ij}} \equiv \boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r_j} = \boldsymbol{r'_i} - \boldsymbol{r'_j} = \boldsymbol{r'_{ij}}$$

$$\boldsymbol{v_{ij}} = \boldsymbol{v_i} - \boldsymbol{v_j} = \boldsymbol{v'_{ij}} - \mathbf{w} \times \boldsymbol{r'_{ij}}$$

Que muestra que v_{ij} no es relacional. En cambio sí lo es

$$\dot{r}_{ij} = \hat{\boldsymbol{r}}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_{ij} = \hat{\boldsymbol{r}}'_{ij} \cdot (\boldsymbol{v}'_{ij} - \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}'_{ij}) = \hat{\boldsymbol{r}}'_{ij} \cdot \boldsymbol{v}'_{ij} = \dot{r}'_{ij}$$

dado que $\hat{\boldsymbol{r}}'_{ij} \cdot (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}'_{ij}) = 0$

Apéndice 2

2.1 Dado que, en general, r_{ij} y $\dot{r}_{ij}$ son funciones del tiempo

$$\frac{d\dot{r}_{ij}^{2}}{dr_{ij}} = 2\,\dot{r}_{ij}\,\frac{d\dot{r}_{ij}}{dt}\,\frac{dt}{dr_{ij}} = 2\,\ddot{r}_{ij}$$

2.2 Con el auxilio de 2.1, es inmediato deducir la ecuación (6), a partir de la (7), empleando (11)

2.3

$$-\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\boldsymbol{v}_{ij} = \frac{dU}{dr_{ij}}\;\hat{\boldsymbol{r}}_{ij}\cdot\boldsymbol{v}_{ij} = \frac{dU}{dr_{ij}}\,\dot{r}_{ij}$$

Por otra parte,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dr_{ij}}\,\frac{dr_{ij}}{dt} = \frac{dU}{dr_{ij}}\,\dot{r}_{ij}$$

Por comparación de las ultimas igualdades resulta:

$$\frac{dU}{dt} = -\boldsymbol{F}_{ji}\cdot\boldsymbol{v}_{ij}$$

La energía cinética vale:

$$T \equiv m_i\,(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i)/2 + m_j\,(\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{v}_j)/2 \qquad \textbf{(a)}$$

Por lo que

$$\frac{dT}{dt} = m_i\,\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{v}_i + m_j\,\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{v}_j =$$

= Fji . vi + Fij . vj =

$$= \boldsymbol{F}_{ji} \bullet (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{F}_{ji} \bullet \boldsymbol{v}_{ij} \qquad \textbf{(b)}$$

De las ecuaciones (a) y (b) deducimos que:

$$\frac{d\,(T+U)}{dt} = 0$$

es decir $E \equiv T + U =$ constante, con lo cual la energía mecánica total, *E*, se conserva.

Apéndice 3

En su artículo *Inercia y Gravitación* (Real Academia de Ciencias de Madrid,1965), dice J. Palacios:

"Galileo y Newton dotaron a la materia de propiedades que se presentan con caracteres tan distintivos que parecen antagónicos. La materia es, a la vez, inerte y gravitatoria, lo cual da origen a otras tantas magnitudes físicas. Lo procedente hubiese sido darles nombres diferentes... . Ambas se llaman masas y, como si su diferencia fuese un accidente, se les aplica los adjetivos inerte y gravitatoria para distinguirlas. Pese a su común denominación, ambas especies de masa son cosas claramente diferentes... . Todo cuerpo, por ser grave, es capaz de hacer con otros lo que, por ser inerte, no puede hacer consigo mismo.

De que dos cantidades sean proporcionales, no se deduce que sean iguales aunque se logre que su razón sea igual a la unidad mediante una elección conveniente de unidades. Para que pueda hablarse de la razón entre dos cantidades es preciso que sean comparables entre sí, lo cual requiere, como requisito indispensable, establecer los criterios de igualdad y de producto por un número. En el caso que nos ocupa, ni siquiera se dispone del primer criterio, pues para poder decir que dos cantidades son iguales es preciso que sus efectos sean iguales, y ocurre que la masa inerte y la gravitatoria se manifiestan por efectos que no son comparables entre sí porque son de índole totalmente diferente".

Señalaremos ahora los elementos básicos sobre los que se funda el Análisis Dimensional tomando elementos de la obra citada en **(12)**. En primer lugar recordamos el llamado Principio métrico, proposición que hace posible aplicar los recursos de la matemática a la descripción de fenómenos físicos:

(Cantidad) = medida x Unidad

Al cambiar, arbitrariamente, las unidades empleadas para medir una dada cantidad resulta,

$$(A) = A.UA = A'UA' = \ \dots \qquad (3_1)$$

expresión que indica que las medidas de una misma cantidad están en razón inversa de las unidades empleadas.

La expresión de las leyes físicas puede hacerse mediante relaciones de proporcionalidad entre cantidades, sin hacer referencia a ningún sistema particular de unidades. Así, la segunda ley de Newton puede escribirse como

$$(F) \propto (m)(a)$$

donde el signo $\propto$ significa "proporcional a". Enuncia entonces Palacios el primer postulado de su teoría de las dimensiones;

"Pueden escogerse las leyes fundamentales de modo que consistan en relaciones de proporcionalidad entre potencias determinadas de las cantidades que intervienen en el fenómeno considerado.". De un modo general,

$$(w) \propto (x)^a(y)^b \ . \ . \ . \ (z)^c \qquad (3_2)$$

donde los exponentes a, b,...,c son números fijos, independientes de la naturaleza de los cuerpos que intervienen en el fenómeno. Agrega Palacios que este postulado se basa en hechos antes que en algún principio metafísico: *"nada se opone, lógicamente, a que las cosas ocurriesen de otra manera, y buena prueba de ello es lo que sucede con la moderna Reología, disciplina ésta a la que el Análisis Dimensional no es aplicable, al menos en su estado actual."*

Al pasar de la relación de proporcionalidad entre cantidades (32) a la ecuación entre medidas es necesario, en general, introducir un factor de proporcionalidad, C,

$$w = C\, x^a\, y^b \ldots z^c \qquad \text{(entre medidas)}$$

Bastará medir en un caso particular las cuantías de w, x, y,...,z para obtener el valor de C. Aquí pueden presentarse dos casos:

a) La medida de C depende de la naturaleza del cuerpo (constante característica o específica).

b) La medida de C es independiente de la naturaleza del cuerpo (constante universal).

Acerca de las constantes universales señala Palacios que tienen un carácter desconcertante pues aparecen en las leyes sin haber sido definidas previamente. Tras examinar la lista de las ecuaciones
fundamentales en que ellas aparecen, sienta una nueva proposición que configura el segundo postulado de su teoría de las magnitudes:

"Son ineludibles las constantes universales que relacionan dos magnitudes inseparables, y superfluas todas las demás".

Son inseparables aquellas magnitudes tales que la presencia de una de ellas en un objeto lleva consigo la presencia de la otra en el mismo objeto. Ejemplos: masa inercial - masa gravitatoria (vinculadas a través de G); número de moléculas y número de moles (vinculadas gracias al número de Avogadro - Loschmidt); (temperatura - energía media por grado de libertad (el nexo es aquí la constante de Boltzmann); energía - frecuencia (ligadas por la constante de Planck); energía - masa (vinculadas mediante la velocidad de la luz en el vacío, gracias a la ley de equivalencia de Einstein); campo eléctrico - inducción (vinculados mediante la permitividad del vacío); campo magnético - poder imanador (ligados mediante la permeabilidad magnética del vacío).

Con el auxilio de sus dos postulados llega Palacios a encontrar el significado de la fórmulas dimensionales. A modo de ejemplo, el significado de la fórmula dimensional de la fuerza, $[f] = L^1 M^1 T^{-2}$ es el siguiente:

$$U_f/U_f' = (U_L/U_L')^1 (U_M/U_M')^1 (U_T/U_T')^{-2} \qquad (33)$$

Donde las U U´ son las unidades de longitud, masa y tiempo correspondientes a dos sistemas coherentes. Un sistema de unidades es coherente con un sistema de ecuaciones cuando éstas son satisfechas al sustituir los símbolos por sus respectivas medidas. Los símbolos $L = U_L/U_L'$, $M = U_M/U_M'$, T ..., no tienen nada de metafísico. Son, simplemente, números provenientes de comparar entre sí unidades de una misma magnitud.

Ejemplo 1.

La unidad de fuerza en el sistema MKS, U_f es el newton (N). ¿Cuánto vale la unidad cgs de fuerza, U_f' ?

Solución:
Aplicamos 3_3 con L = (1m/1cm) = 100 ; M = (1kg/1g) = 1000; T = con lo que resulta.
$U_f´= 10^{-5}\, U_f$, relación que expresa que la dina es cien mil veces menor que el newton.

Ejemplo 2 **(12)**.

Sabiendo que en el sistema cgs la constante de la gravitación vale $G = 6{,}67\text{x}10^{-8}\text{cm}^3\text{g}^{-1}\text{s}^{-2}$, averiguar su valor en el sistema MKS.

Solución: La fórmula dimensional de G es:

$$[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$$

Donde $L = (1cm/1m) = 10^{-2}$; $M = (1g/1kg) = 10^{-3}$: T = 1.

Recordando que las medidas están en razón inversa de las unidades empleadas (3_1) tendremos:

$$G´/G = (10^{-2})^3(10^{-3})^{-1} = 10^{-3}$$

con lo que resulta $G´ = 6{,}67\text{x}10^{-11}\ \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Ejemplo 3 **(12)**

Averiguar cuál ha de ser la unidad de tiempo para que, conservando el centímetro y el gramo, adquiera *G* el valor 1.

Solución: Aquí debemos lograr que sea G´ = 1 con L = 1; M = 1;
$T = 1s/U_T´$. De este modo,

$$1/6{,}67\text{x}10^{-4} = (1s/U_T´)^{-2}$$

es decir, la nueva unidad será

$$U_T´ = 10^4/\sqrt{6{,}67}\ \text{segundos.}$$

El Análisis Dimensional resulta de gran utilidad para el planteo de problemas en que intervienen gran cantidad de variables. Estos problemas, por su complejidad, deben abordarse mediante métodos experimentales. Aquí resulta muy valioso poder determinar el número de variables adimensionales (monomios pi) independientes para poder aprovechar inteligentemente las mediciones.

Al lector interesado en la axiomática, historia y perspectivas de esta disciplina recomendamos las referencias **(23)** y **(24)**.

Apéndice 4

En la ecuación (12) tenemos:

$r_{ic} = r_i - R;$
$v_i = v_i - v_c;$

ya que $v_c = 0$

Para desarrollar las integrales angulares conviene hacer:

$r_i = r_i\, \boldsymbol{k}$

Por otra parte

$\boldsymbol{R} = R\,(\text{sen}\theta \cos\varphi\, \boldsymbol{i} + \text{sen}\theta\ \text{sen}\varphi\, \boldsymbol{j} + \cos\theta\, \boldsymbol{k})$

Con lo que:

$\boldsymbol{r_{ic}} = (\boldsymbol{R}^2 + \boldsymbol{r_i}^2 - 2\boldsymbol{R}\boldsymbol{r_i} \cos\theta)^{½}$

De este modo $(d\Omega = \text{sen}\varphi\ d\theta)^{½}$

$$\int \frac{d\Omega}{\boldsymbol{r_{ij}}} = \int_0^{\pi} d\theta\ \text{sen}\theta\ (\boldsymbol{r_i}^2 + R^2 - 2\, r_i\, R \cos\theta)^{-½} \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 2\,\pi \int_0^{\pi} d\theta\ \text{sen}\theta\ (\boldsymbol{r_i}^2 + \text{R}^2 - 2\, r_i\, R \cos\theta)^{-½} = \frac{4\,\pi}{R}$$

Siempre que $r_i < R$

Operando de una manera similar **(13)** tendremos:

$$\int \boldsymbol{dW}\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r_{ij}}^3}\ (\boldsymbol{r_{ij}} \cdot \boldsymbol{v_i})^2 = \frac{4\,\pi}{3\,R}\ v_i^2$$

Siempre que $r_i < R$

Apéndice 5

Acerca de la Portada

Siendo niños nos preguntamos, con gran curiosidad, *porqué* el trompo, cuando está rotando no cae y sí lo hace ni bien cesa la rotación. Nuestras mentes infantiles reconocen que el trompo, al igual que la piedra, caen buscando el piso, si es que no aparece una fuerza que contrarreste su peso.

Luego pensamos que la rotación en *sí* genera la fuerza que *vence* a la gravedad y, llevados por estos razonamientos, llegamos a creer que un trompo en rotación debería ser *más liviano* que el mismo trompo en reposo. Al meditar sobre esta fantástica posibilidad preguntamos (las más de las veces sin éxito), estudiamos, experimentamos, repensamos el asunto...

Llegamos, al fin, a la conclusión de que es un absurdo creer que el trompo se aliviane por el sólo hecho de rotar. De ser así, podríamos construir naves que venzan la gravedad con el sólo recurso de hacerlas rotar a gran velocidad. Estudiamos luego el teorema del momento angular y ya nos quedamos tranquilos: la rotación genera un *par* de fuerzas (torque) sobre el trompo. Como de este par, una fuerza *apunta* hacia *arriba* y la otra hacia *abajo*, comprendemos porqué el trompo no necesita alivianarse para no caer.

Pasa el tiempo y el trompo nos vuelve a intrigar... ¿Cómo surge el par de fuerzas que asegura la estabilidad del trompo? ¿Quién provee las fuerzas que constituyen el torque?.

El modelo de Mach esbozado en este ensayo permite mejorar nuestra comprensión del asunto. La descripción que sigue está tomada, en líneas generales, de la referencia **(10)**.

Para simplificar los cálculos consideremos una rueda de masa despreciable con cuatro partículas **A, B, C, D** idénticas, simétricamente distribuidas (Figura 7). La rueda gira con una velocidad angular ω con relación al eje de simetría x-y, el cual se encuentra, inicialmente, formando un ángulo recto con la vertical y en reposo. En estas condiciones se libera el eje que, naturalmente, comenzará a caer. Observamos que el punto **D**, el más próximo al observador cambia su velocidad de $v = \omega \mathbf{R}$ a v´. La variación de velocidad, Δ v es, para un ángulo α suficiente-mente pequeño, horizontal y orientada hacia la izquierda. La fuerza que se *opone* a dicha aceleración también será horizontal, aunque dirigida hacia la derecha.

Analizando el punto **B**, el más alejado del observador, en el mismo lapso, advertimos que la aceleración debida a la caída también es horizontal, dirigida hacia la derecha. Por consiguiente, la *reacción inercial* (provista por la materia distante, en el modelo adoptado) estará dirigida hacia la izquierda.

Estas dos fuerzas de inercia generan un torque inercial. Sumando para todas las partículas del trompo, resulta un par total responsable de la precesión del mismo: el eje del trompo describe un cono, con una velocidad angular **W** inversamente proporcional a la velocidad de rotación ω.

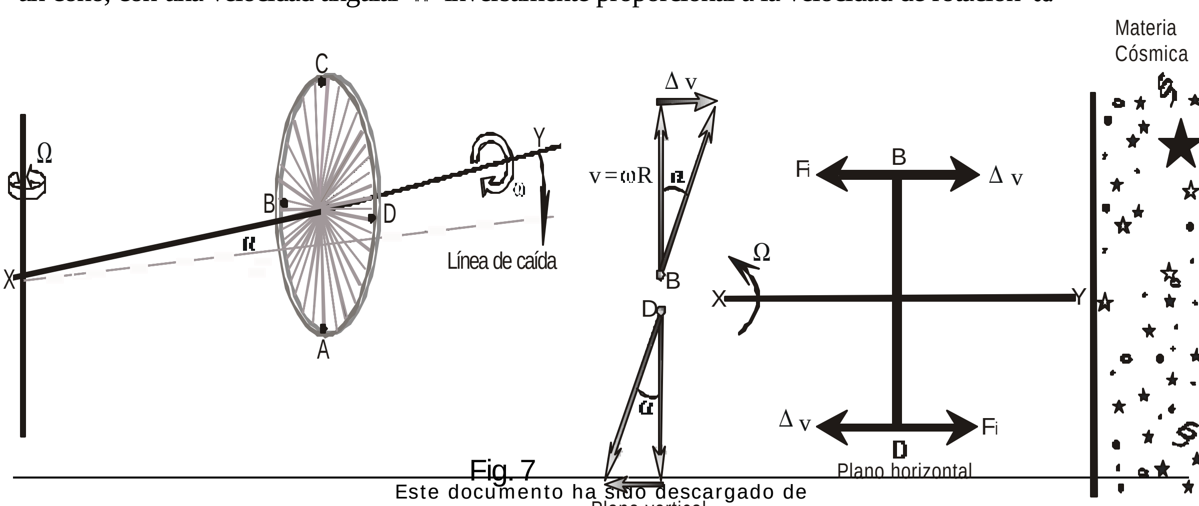


Fig. 7

REFERENCIAS

(1) U. Ingard y W. L. Kraushaar, *Introducción al Estudio de la Mecánica, Materia y Ondas.* Editorial Reverté S. A. (Barcelona), 1966.

(2) A. K. T. Assis, *Mecânica Relacional.* Coleçao CLE, Campinas (Brasil), 1998 (versión original). Versión inglesa; *Relational Mechanics.* Apeiron, Montreal, 1999.

(3) A. K. T. Assis (1989), *Foundations of Physics Letters*, 2, 301-318.

(4) H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, Reading. 1950.

(5) A. K .T. Assis (1994), *Frontiers of Fundamental Physics*. Plenum Press, New York.

(6) J. Guala Valverde and P. Mazzoni (1995), *American Journal of Physics*, **63**, 228.

(7) A. K. T. Assis, *Weber´s Electrodynamics.* Fundamental Theories of Physics. Kluwer Academic Press (Dordrecht, Boston, London), 1994.

(8) A. K. T. Assis, *Curso de Electrodinâmica de Weber*. Ed. Unicamp, Campinas, 1995.

(9) A. K. T. Assis (1992), *Apeiron*, **13**, 3-11.

(10) A. K. T. Assis and P. Graneau, *Hadronic Journal*, **18**, 271-289.

(11) J. Palacios, *Física General*, Espasa Calpe (Madrid). 3ª Edición, 1965.

(12) J. Palacios, *Análisis Dimensional*. Espasa Calpe (Madrid) 1956-1964. Véase también, *Analyse Dimensionnelle*. Gauthier - Villars (Paris), 1960 y *Dimensional Analysis.* Mc. Millan (London), 1964.

(13) R. Bunchaft, (1998), Dissertaçao de Mestrado. Salvador, Bahía (Brasil).

(14) Jo.Guala Valverde (1997), *Galilean Electrodynamics*, **8,** (5), J. Tramaglia and J. Guala Valverde, *Galilean Electrod*. In press.

(15) E. Schrödinger (1925), *Annalen der Physik*, 77, 325-336. Traducción inglesa de J. B. Barbour y H. Pfister en *From Newton Bucket to Quantum Gravity*. Birkhauser (London), 1995.

(16) T. E.Phipps, Jr. (1992), *Physics Essays*, Canadá, 5, 425-428.

(17) J. Guala Valverde (1998), *Physics Essays*, Canadá, **11**, 164-165

(18) T.E.Phipps, Jr. (1978), *Speculations in Science and Technology*, 1, 449-508.

(19) P. Graneau and N.Graneau, *Newton versus Einstein. How Matter interacts with Matter*, Carlton press Inc. New York, 1993.

(20) T. W. Marshall (1963), *Proceedings of the Royal Society*, **A273**, 475.

(21) T. E. Boyer (1975), *Physical Review* **D, 11**, 790.

(22) J. Guala Valverde (1991), *Phyisica Scripta. The Royal Swedish Academy of. Sciences*. **43**, 551.

(23) F. González de Posada, *Breviario de Teoría Dimensional.* Universidad Politécnica de Madrid, 1994.

(24) F. González de Posada, *Julio Palacios*. Fundación Universidad Politécnica de Madrid, 1993.