



Geometría

conectar **igualdad**

www.conectarigualdad.gob.ar

Serie para la enseñanza en el modelo 1 a 1





Serie para la enseñanza en el modelo 1 a 1



conectar igualdad
www.conectarigualdad.gob.ar

Geometría

Paula Podestá
compiladora



Presidencia de la Nación





Compiladora: **Paula Podestá**, sobre la base de materiales de Educ.ar y Conectar Igualdad.
Edición y corrección: **Martín Vittón**.
Diseño de colección: **Silvana Caro**.
Fotografía: © **Francesco de Comite** (tapa) y **Andreyutzu**.
Gestión y edición fotográfica: **María Angélica Lamborghini** (tapa).

Coordinación de Proyectos Educ.ar S. E.: **Mayra Botta**.

Coordinación de Contenidos Educ.ar S. E.: **Cecilia Sagol**.

Líder de proyecto: **Magdalena Garzón**.

Geometría / compilado por Paula Podestá. - 1a ed. - Buenos Aires
: Ministerio de Educación de la
Nación, 2011.
32 p. ; 20x28 cm.

ISBN 978-950-00-0863-1

1. Material Auxiliar para la Enseñanza . 2. Geometría. I. Podestá,
Paula, comp.
CDD 371.33

ISBN: 978-950-00-0863-1

Queda hecho el depósito que dispone la ley 11.723.

Impreso en Argentina. Printed in Argentina.

Primera edición: octubre 2011.



Autoridades

Presidenta de la Nación

Dra. Cristina Fernández de Kirchner

Ministro de Educación

Prof. Alberto E. Sileoni

Secretaria de Educación

Prof. María Inés Abrile de Vollmer

Jefe de Gabinete

Lic. Jaime Perczyk

Subsecretaria de Equidad y Calidad Educativa

Lic. Mara Brawer

Subsecretario de Planeamiento Educativo

Lic. Eduardo Aragundi

Directora Ejecutiva del INET

Prof. María Rosa Almandoz

Directora Ejecutiva del INFOD

Lic. Graciela Lombardi

Directora Nacional de Gestión Educativa

Prof. Marisa Díaz

Directora Nacional de Formación e Investigación

Lic. Andrea Molinari

Gerente General Educ.ar S. E.

Rubén D'Audía

Coordinadora Programa Conectar Igualdad

Lic. Cynthia Zapata

Gerente TIC y Convergencia Educ.ar S. E.

Patricia Pomiés



Hemos emprendido un camino ambicioso: el de sentar las bases para una escuela secundaria pública inclusiva y de calidad, una escuela que desafíe las diferencias, que profundice los vínculos y que nos permita alcanzar mayor igualdad social y educativa para nuestros jóvenes.

En este contexto, el Programa Conectar Igualdad, creado por decreto del gobierno nacional N.º 459/10, surge como una política destinada a favorecer la inclusión social y educativa a partir de acciones que aseguren el acceso y promuevan el uso de las TIC en las escuelas secundarias, escuelas de educación especial y entre estudiantes y profesores de los últimos años de los Institutos Superiores de Formación Docente.

Tres millones de alumnos de los cuales somos responsables hoy integran el programa de inclusión digital. Un programa en el que el Estado asume el compromiso de poner al alcance de todos y todas la posibilidad de acceder a un uso efectivo de las nuevas tecnologías.

Un programa que le otorga a la escuela el desafío de ofrecer herramientas cognitivas y el desarrollo de competencias para actuar de modo crítico, creativo, reflexivo y responsable frente a la información y sus usos para la construcción de conocimientos socialmente válidos.

En nuestro país esta responsabilidad cobró vida dentro de la Ley de Educación Nacional N.º 26.206. En efecto, las veinticuatro jurisdicciones vienen desarrollando de manera conjunta la implementación del programa en el marco de las políticas del Ministerio de Educación de la Nación, superando las diferencias políticas con miras a lograr este objetivo estratégico.

Para que esta decisión tenga un impacto efectivo, resulta fundamental recuperar la centralidad de las prácticas de enseñanza, dotarlas de nuevos sentidos y ponerlas a favor de otros modos de trabajo con el conocimiento escolar. Para ello la autoridad pedagógica de la escuela y sus docentes necesita ser fortalecida y repensada en el marco de la renovación del formato escolar de nuestras escuelas secundarias.

Sabemos que solo con equipamiento e infraestructura no alcanza para incorporar las TIC en el aula ni para generar aprendizajes más relevantes en los estudiantes. Por ello los docentes son figuras clave en los procesos de incorporación del recurso tecnológico al trabajo pedagógico de la escuela. En consecuencia, la incorporación de las nuevas tecnologías, como parte de un proceso de innovación pedagógica, requiere entre otras cuestiones instancias de formación continua, acompañamiento y materiales de apoyo que permitan asistir y sostener el desafío que esta tarea representa.

Somos conscientes de que el universo de docentes es heterogéneo y lo celebramos, pues ello indica la diversidad cultural de nuestro país. Por lo tanto, de los materiales que en esta oportunidad ponemos a disposición, cada uno podrá tomar lo que le resulte de utilidad de acuerdo con el punto de partida en el que se encuentra.

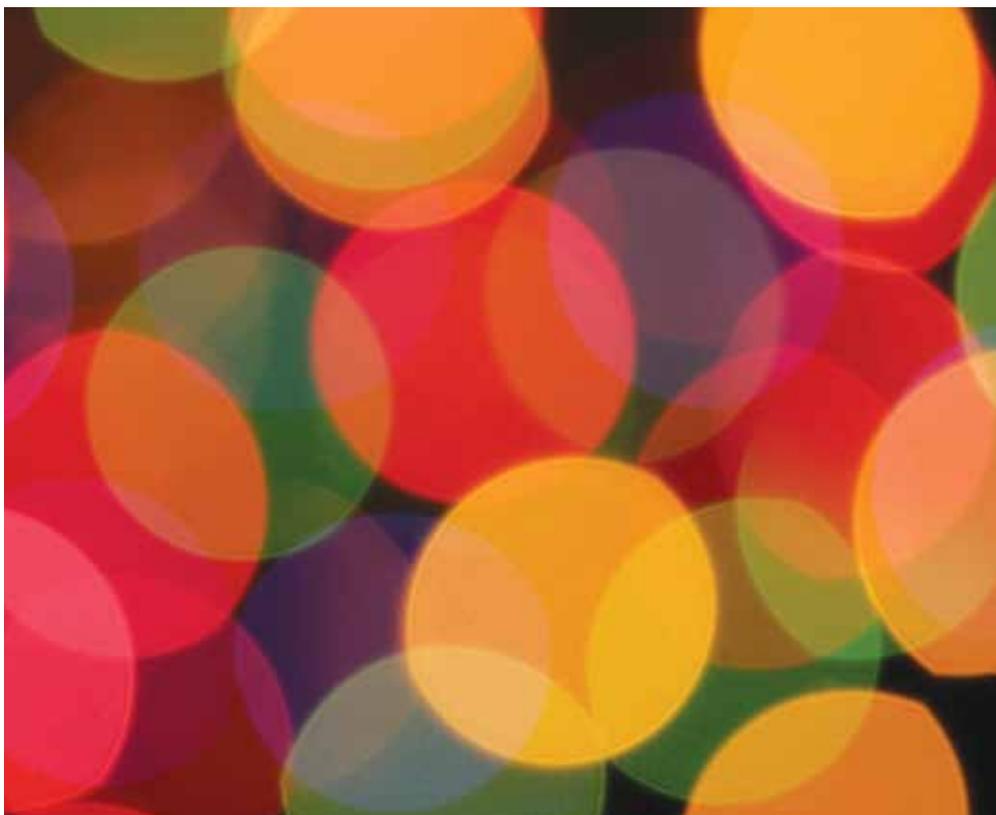
En tal sentido, las acciones de desarrollo profesional y acompañamiento se estructuran en distintas etapas y niveles de complejidad, a fin de cubrir todo el abanico de posibilidades: desde saberes básicos e instancias de aproximación y práctica para el manejo de las TIC, pasando por la reflexión sobre sus usos, su aplicación e integración en el ámbito educativo, la exploración y profundización en el manejo de aplicaciones afines a las distintas disciplinas y su integración en el marco del modelo 1 a 1, hasta herramientas aplicadas a distintas áreas y proyectos, entre otros.

El módulo que aquí se presenta complementa las alternativas de desarrollo profesional y forma parte de una serie de materiales destinados a brindar apoyo a los docentes en el uso de las computadoras portátiles en las aulas, en el marco del Programa Conectar Igualdad. En particular, este texto pretende acercar a los integrantes de las instituciones que reciben equipamiento 1 a 1 reflexiones, conceptos e ideas para el aula. De esta manera, el Estado Nacional acompaña la progresiva apropiación de las TIC para mejorar prácticas habituales y explorar otras nuevas, con el fin de optimizar la calidad educativa y formar a los estudiantes para el desafío del mundo que los espera como adultos.

Deseamos que sea una celebración compartida este importante avance en la historia de la educación argentina, como parte de una política nacional y federal que tiene como uno de sus ejes fundamentales a la educación con inclusión y justicia social.

Introducción	8
1 Un enfoque para la enseñanza de la Geometría	10
Enseñar Geometría Dinámica	12
El procesador GeoGebra	13
Información en la web	13
El entorno de trabajo	14
GeoGebra en las clases de Matemática	15
Para comenzar	15
2 Tareas de conceptualización	16
Enseñar Geometría con GeoGebra	16
Secuencia didáctica n.º 1. Teorema de Pitágoras	16
Secuencia didáctica n.º 2. Construcción de circunferencias	18
Secuencia didáctica n.º 3. Movimientos en el plano	20
3 Tareas de investigación	22
Secuencia didáctica n.º 4. Longitud de la circunferencia	22
Secuencia didáctica n.º 5. Propiedades de los ángulos de un triángulo	23
4 Tareas de justificación	26
Secuencia didáctica n.º 6. Ángulos inscritos y semiinscritos	26
Secuencia didáctica n.º 7. Suma de los ángulos interiores de polígonos	27
Secuencia didáctica n.º 8. Ángulos determinados por rectas paralelas	29
Conclusión	31

Introducción



Este material está pensado para acompañar sus tareas como docentes de Matemática en la escuela secundaria, en un momento de cambio sustancial marcado por la inclusión de las netbooks en el aula a partir de la iniciativa del programa Conectar Igualdad.

En las últimas décadas, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) han modificado las relaciones sociales en todos sus aspectos, llegando a redefinir la manera de interactuar con el medio. Por esta razón, la introducción de estas tecnologías en el aula supone un nuevo desafío para los docentes.

Hasta ahora, las prácticas áulicas intentaban responder el siguiente interrogante: ¿cómo enseñar Matemática desde los lineamientos de la Didáctica de la Matemática? En este momento, la cuestión es más compleja y la nueva pregunta debería ser: ¿cómo enseñar Matemática desde los lineamientos de su didáctica utilizando las TIC en forma apropiada? La respuesta a este nuevo eje de reflexión está en vías de construcción.

La actualización disciplinar, el aprender a emplear programas educativos, la incorporación significativa de las TIC en el aula, el estudiar y analizar las propias prácticas son algunas de las acciones que como docentes no podemos dejar de lado.

En este material hemos pretendido acercarles algunas ideas sobre qué significa enseñar Geometría utilizando GeoGebra, un programa de Geometría dinámica. A lo largo de estas páginas podrán encontrar un marco general con lineamientos sobre la enseñanza de la Geometría, una presentación de GeoGebra y una serie de secuencias didácticas que brindan algunas orientaciones sobre cómo organizar la clase aprovechando las netbooks que poseen los alumnos.

Nos parece importante aclarar que este material no es un manual de uso de GeoGebra ni un texto que desarrolla de manera secuencial y jerarquizada contenidos de Geometría. Simplemente son ideas, propuestas y sugerencias para que ustedes evalúen la posibilidad de llevarlas al aula. Estamos convencidos de que ustedes serán capaces de enriquecer y mejorar las ideas que aquí les presentamos.

1

Un enfoque para la enseñanza de la Geometría

[...] el universo [...] está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos, es como girar vanamente en un oscuro laberinto.

 Galileo Galilei

La enseñanza de la Matemática ha cobrado nuevos horizontes a partir del desarrollo de las tecnologías y la posibilidad de que los alumnos de las escuelas secundarias cuenten con netbooks personales. Para el caso particular del trabajo en Geometría, existen numerosos programas de Geometría Dinámica y graficadores que plantean al docente formas inéditas de acercar el conocimiento al alumno. Nos interesa, por tanto, construir una práctica docente a partir de los lineamientos actuales de la Didáctica de la Matemática enmarcada en el potencial que nos brinda el modelo 1 a 1.

El siguiente gráfico muestra que la construcción de esta práctica, respetando los marcos teóricos de ambos modelos, es totalmente factible:



En el marco de lo expuesto, focalizaremos la mirada en la enseñanza de la Geometría. Pretendemos alejarnos de enfoques tradicionales en los cuales la presentación ostensiva de los conceptos suele ser muy utilizada. Según Brousseau, “la ostensión es el procedimiento privilegiado para la introducción precoz de las nociones geométricas”, y si reflexionamos sobre nuestras prácticas docentes, seguramente podremos reconocer rasgos de esa tendencia.

Un esquema de clase ostensiva podría ser el siguiente: el docente explica qué es un movimiento en el plano, detalla cada uno de los movimientos mostrando imágenes, realiza un ejemplo de traslación en el pizarrón y luego les pide a los alumnos que resuelvan ejercicios del mismo tipo.

La enseñanza de la Geometría, por el contrario, supone que los alumnos realicen tareas de distintos tipos, a saber:*

- **Tareas de conceptualización.** Apuntan a la construcción de conceptos y de relaciones geométricas partiendo del supuesto de que la mera definición de un concepto no basta para comprenderlo, y que el estudio de diversas representaciones gráficas pueden permitir una conceptualización completa y adecuada.
- **Tareas de investigación.** Ponen al alumno en la necesidad de indagar acerca de las características, propiedades y relaciones entre objetos geométricos con el propósito de dotarlas de significados.
- **Tareas de justificación.** Apuntan a que el alumno elabore conjeturas o procedimientos de resolución sobre un determinado problema para luego explicar, probar o demostrar argumentando la veracidad de la solución hallada. Estas tareas pueden ser de diferente tipo, según la edad de los alumnos y los objetivos que persiga el docente:
 - **Tareas de explicación.** El alumno debe exponer el razonamiento empleado para resolver una situación y todo lo que exprese es sometido a discusión.
 - **Tareas de prueba.** Se comprueban teorías sin seguir los pasos rigurosos de una demostración matemática pero que igualmente satisfacen las necesidades de los alumnos. Por ejemplo, cuando se prueba que la suma de los ángulos interiores de un triángulo da como resultado 180° .
 - **Tareas de demostración.** El alumno debe realizar una sucesión coherente de pasos que, tomando como verdadero un conjunto de hipótesis, permite asegurar la veracidad de una tesis. Estos pasos deben estar fundamentados en la aplicación de reglas de deducción. Este tipo de tarea se realiza en los años superiores de la escuela secundaria y en la universidad.

* GARCÍA PEÑA, Silvia y Olga LÓPEZ ESCUDERO: *La enseñanza de la Geometría*, colección Materiales para apoyar la práctica educativa, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, México, 2008.

Evidentemente, las propuestas de trabajo que se realizan en el aula no siempre pueden enmarcarse en una de estas categorías. Es probable que una tarea que inicialmente apuntó a que el alumno investigara un determinado tema, más adelante se convierta en una tarea de justificación. Así y todo, consideramos que esta categorización nos puede permitir organizar el tipo de trabajo que pretendemos realizar en nuestras clases de Geometría.

A continuación presentamos un gráfico que permite visualizar las habilidades que los alumnos deberían desarrollar a partir del trabajo con las tareas mencionadas.



Enseñar Geometría Dinámica

En la actualidad, enseñar Geometría es una tarea que puede verse enormemente enriquecida por el empleo de procesadores geométricos que logran darles dinamismo a las construcciones. De hecho, en estos casos, se habla de Geometría Dinámica. Pero ¿qué es la Geometría Dinámica? Este concepto, introducido por Nick Jackiw y Steve Rasmussen, se aplica a los programas informáticos que permiten a los usuarios, después de haber hecho una construcción, mover ciertos elementos arrastrándolos libremente y observar cómo otros elementos responden dinámicamente al alterarse las condiciones previas.

Hasta el momento, nuestros alumnos sólo podían desarrollar construcciones gráficas en papel, con la limitación de que ellas podían carecer de exactitud y, además, eran fijas, con lo cual se restringían las posibilidades de exploración. Como contrapartida, las construcciones con Geometría dinámica son precisas y permiten, en forma sencilla y rápida, realizar complejizaciones y/o modificaciones posteriores.



En este material hemos elegido, entre la cuantiosa variedad existente, el programa GeoGebra (instalado en todos los equipos portátiles) para abordar algunas de las posibilidades de trabajo que nos presenta este tipo de software.

El procesador GeoGebra

GeoGebra es un programa de Geometría Dinámica desarrollado por Markus Hohenwarter en la Universidad Johannes Kepler de Linz, Austria. Lo interesante de este software es que combina elementos de Geometría, Álgebra, Análisis y Estadística, y que además es libre y gratuito. Otra ventaja de este programa es que funciona en varios sistemas operativos (Windows, MacOS X, Linux o Solaris).

GeoGebra fue elaborado con una visión colaborativa, por lo cual es posible acceder a espacios de ayuda, recursos, foros y wikis que usuarios de todo el mundo mantienen en constante renovación.

Información en la web

El sitio oficial de GeoGebra es www.geogebra.org/cms/es. En esta web se encuentra todo tipo de información sobre el programa e incluso permite descargarlo en forma gratuita. Para comenzar a conocer GeoGebra, los invitamos a explorar el sitio.

Se sugiere especialmente la lectura del manual oficial de la versión 3.2 en español elaborado por Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter y Liliana Saidón desde www.geogebra.org/help/docues.pdf.

También se recomienda el material “Apuntes sobre GeoGebra... con algunos toques de Matemática” elaborado por Belarmino Corte Ramos editado por el Centro del Profesorado de Recursos de Gijón en <http://web.educastur.princast.es/cpr/gijon/recursos/mates/ManualGeogebra.pdf>.

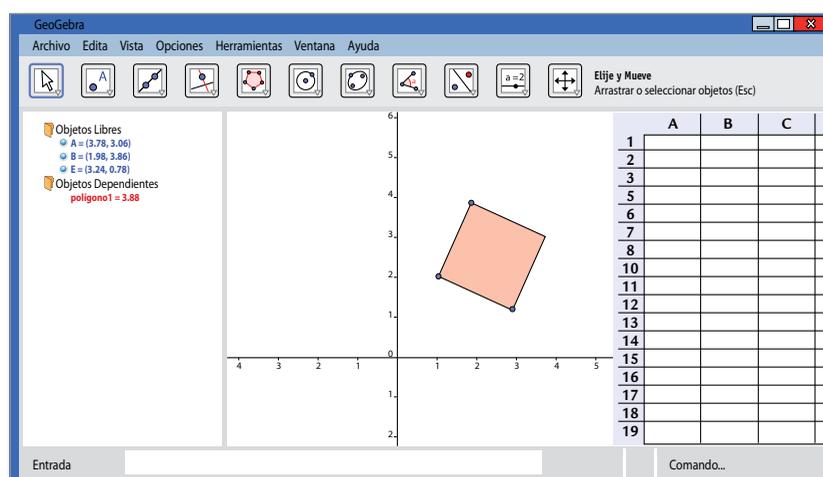
Muchos docentes de todo el mundo emplean GeoGebra en sus clases y comparten sus experiencias en la web:

- GeoGebra en la enseñanza de las Matemáticas (curso).
<http://geogebra.es/cvg/index.html>
- Figuras interactivas realizadas con Geogebra:
<http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/>
- Geometría Dinámica: www.geometriadinamica.cl
- Geometría Dinámica: <http://geometriadinamica.org/index.html>
- Instituto GeoGebra de Cantabria: <http://geogebra.es/>

El entorno de trabajo

El entorno de trabajo tiene una visualización sencilla, lo cual ayuda a que el uso del programa también lo sea. GeoGebra nos permite obtener tres perspectivas de cada objeto matemático:

- vista gráfica (es la que vemos al iniciar el programa);
- vista algebraica;
- vista de hoja de cálculo (no será trabajada en este material).



Para acceder a las vistas, basta con hacer clic, por ejemplo, en **Vista > Vista Algebraica**.

Lo interesante de estas tres vistas es que la representación de un mismo objeto en una de ellas se vincula dinámicamente con las demás en una adaptación automática y recíproca que asimila los cambios producidos en cualquiera de ellas, más allá de en cuál haya sido creada originalmente.

Para comenzar a graficar, basta con seleccionar alguno de los íconos disponibles en la **barra de herramientas**. Estos íconos, además de permitir realizar el dibujo, incluyen algunas opciones para trabajar con ese elemento. Por ejemplo, el botón **Polígono** ofrece la posibilidad de realizar un polígono o un polígono regular.

Recuerden que todo objeto creado en la vista gráfica siempre tendrá su correspondiente representación en la vista algebraica.

Además de esta forma, se pueden crear elementos a través de la **barra de entrada**. La diferencia es que, si se utiliza esta opción, hay que escribir las expresiones algebraicas y al pulsar Enter se verá el elemento. En la barra de entrada es posible trabajar con los comandos que ofrece el programa. La **lista de comandos** se encuentra en la esquina inferior derecha y al hacer clic sobre ese botón se despliega una lista de opciones.

Si se observa una imagen en vista algebraica, se diferencian los objetos

matemáticos libres y los dependientes. Todos los nuevos objetos creados sin emplear ninguno de los ya existentes es un objeto libre. Por el contrario, será un objeto dependiente el que se cree utilizando algún objeto preexistente.

GeoGebra en las clases de Matemática

GeoGebra es una herramienta de trabajo que puede ser de utilidad tanto para el docente como para el alumno. Para el docente, porque le permite elaborar materiales didácticos estáticos –por ejemplo imágenes, presentaciones, trabajos prácticos, etc.– o dinámicos, como demostraciones dinámicas o applets publicados en una página web o blog. Al alumno le brinda la posibilidad de visualizar conceptos matemáticos, realizar construcciones libres o dirigidas a fin de resolver problemas y/o explorar e investigar hipótesis.

Como la incorporación de GeoGebra a las clases de Matemática puede realizarse de varias formas, a continuación les proponemos varias opciones de trabajo.

Para comenzar

Aquellos docentes que no se encuentran muy familiarizados con el programa, pueden comenzar utilizando applets creados por otros profesores. Estos se pueden encontrar con facilidad en distintos sitios de Internet.

Pero ¿qué es un applet de GeoGebra? Es un subprograma de GeoGebra, una construcción realizada con Geogebra que se puede insertar en una página web y permite que el usuario interactúe dinámicamente con él.

En el siguiente link pueden ver un ejemplo de applet sobre el Teorema de Thales: <http://www.infoymate7.com/weba/Thales/Thales.html>.

Otra forma de comenzar a explorar el programa es creando materiales didácticos estáticos que representen situaciones problemáticas, como por ejemplo problemas dados por gráficos con los datos incluidos en la imagen. Estos materiales luego pueden ser incluidos en trabajos prácticos o evaluaciones.

Una vez que se familiaricen con el programa, podrán crear sus propios applets. Les proponemos que luego los publiquen en el sitio de la escuela para que estén a disposición del alumnado.

Obviamente, estas no son las únicas opciones. Confiamos en que la creatividad y profesionalidad de los docentes permitirá recrear y enriquecer las propuestas que les presentamos.

2

Tareas de conceptualización

Enseñar Geometría con GeoGebra



Confucio

El sabio comienza por hacer lo que quiere enseñar y después enseña.

El propósito de este material es presentar nuevas estrategias de enseñanza para las clases de Geometría aprovechando el potencial que brinda el software GeoGebra.

A continuación se presenta una serie de secuencias didácticas para el aula que sugieren el abordaje de distintas temáticas empleando el programa GeoGebra como recurso didáctico. Las secuencias se encuentran agrupadas según el tipo de tarea principal involucrada (de conceptualización, de investigación o de justificación).

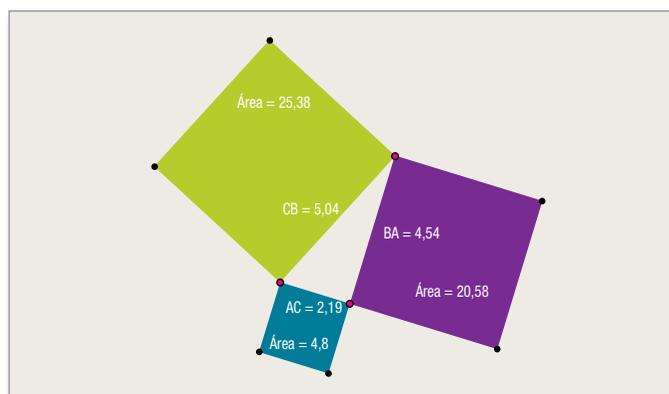
Secuencia didáctica n.º 1 Teorema de Pitágoras

Esta secuencia tiene como objetivos que el alumno pueda apropiarse del Teorema de Pitágoras a partir de una conceptualización gráfica utilizando GeoGebra, que pueda formular conclusiones y validarlas, y que sea capaz de investigar y gestionar información relevante sobre el tema. Si bien en Internet encontramos numerosos applets que presentan la demostración gráfica del teorema, nos parece interesante que inicialmente los alumnos construyan su propia representación. Para ello les sugerimos darles las siguientes indicaciones.

1. Construyan un triángulo rectángulo. Nombren sus vértices como A, B y C donde el ángulo \hat{A} sea de 90° .
2. Sobre cada uno de los lados del triángulo construyan un cuadrado.
3. ¿Cuál es la longitud de cada lado? Utilicen la herramienta **Distancia** o **longitud** para indicarlo en la construcción.
4. ¿Cuál es el área de cada uno de los cuadrados? Utilicen la herramienta **Área** para indicarlo en la construcción.
5. Registren y completen en el cuadro los valores que se obtienen en cada caso (muevan los vértices del triángulo hasta alcanzar estos valores):

\overline{AB}	\overline{CA}	\overline{BC}	\overline{AB}^2	\overline{CA}^2	\overline{BC}^2
3	3				
				64	100
		20	144		

6. Analicen la tabla y respondan: ¿qué relación existe entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo?



Posible producción de los alumnos.

Una vez realizadas estas actividades, el docente propicia un momento de socialización y puesta en común de lo realizado y sistematiza el Teorema de Pitágoras a partir de lo producido por sus alumnos.

A continuación, nos interesa que los alumnos se apropien del teorema a partir de diferentes representaciones gráficas. Por esta razón, ahora sí nos parece que podemos proponerles a los alumnos que exploren diferentes demostraciones gráficas del Teorema de Pitágoras. Les sugerimos, entre la infinita variedad existente en la web, la siguiente: Teorema de Pitágoras por Manuel Sada:

<http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/pitagoras.htm>.



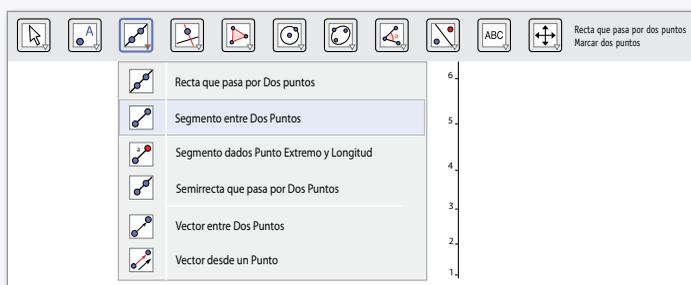
¿Qué pueden hacer los alumnos? Algunas sugerencias:

- Explorar todos los applets, elegir uno para comprender cómo se realiza la demostración gráfica y explicarlo en forma oral.
- Elegir un applet y reconstruirlo en GeoGebra.
- Elegir un applet y escribir en lenguaje matemático la demostración que se presenta en forma gráfica.

Como cierre de la clase, el docente puede socializar las producciones de los alumnos según lo que haya propuesto y solicitarles que para la próxima clase investiguen quién fue Pitágoras.

Cómo dibujar un triángulo rectángulo

Una forma de construir un triángulo rectángulo consiste en trazar primero dos rectas perpendiculares para contar con el ángulo recto. Para ello, utilizar las herramientas **Recta que pasa por dos puntos** y **Recta perpendicular**. Luego, señalar un tercer punto con **Nuevo punto** y con la herramienta **Polígono** unir los tres vértices del triángulo.



Cómo construir los cuadrados

Para dibujar los cuadrados, elegir la herramienta **Polígono regular**, hacer clic en los vértices de uno de los lados del triángulo, luego escribir "4" (este valor suele venir predeterminado) en la ventana que se despliega y hacer clic en "OK".



Secuencia didáctica n.º 2 Construcción de circunferencias

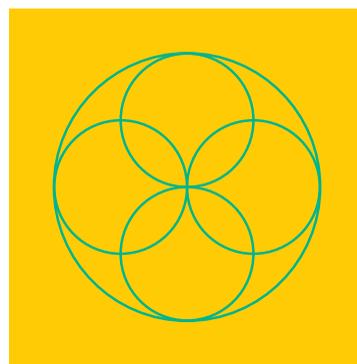
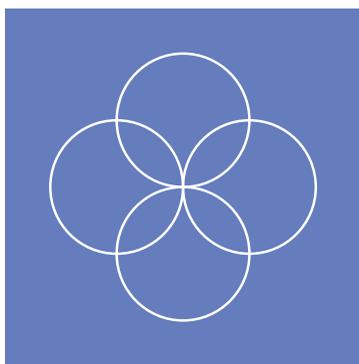
Esta secuencia tiene como objetivos la construcción de circunferencias para reproducir y crear figuras, conocer y utilizar los conceptos de centro de una circunferencia, radio y diámetro para realizar construcciones, explorar las diversas herramientas de construcción que ofrece GeoGebra, y trabajar de manera ordenada y responsable.



Seguramente, los alumnos ya hayan trabajado con el concepto de círculo y circunferencia, y se habrán detenido en la construcción de circunferencias utilizando los elementos de Geometría bajo determinadas condiciones. Teniendo en cuenta esos conocimientos previos, proponemos la siguiente tarea para que realicen en forma individual en sus netbooks, a fin de profundizar el concepto de circunferencia y su trazado.

1. Utilizando GeoGebra, reproducir los siguientes dibujos.

- a) Detallar las herramientas utilizadas y las condiciones matemáticas respetadas.



2. Crear una figura propia con círculos.

- a) Detallar las herramientas utilizadas y las condiciones matemáticas respetadas.

3. Mostrarle a un compañero la figura creada y pedirle que la reproduzca. Luego, evaluar si la tarea fue exitosamente lograda.

Consideramos conveniente observar el trabajo de los alumnos, orientar y valorar las producciones que se van realizando en el aula. Se espera que al finalizar la intervención todos los alumnos hayan podido resolver las actividades y que estas hayan sido evaluadas.



Cómo construir circunferencias

Hay varias opciones para graficar circunferencias. Veamos cuáles son:

	Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos
	Circunferencia dados su Centro y Radio
	Compás
	Circunferencia dados Tres de sus Puntos

Secuencia didáctica n.º 3

Movimientos en el plano

Esta secuencia tiene como objetivos investigar en Internet gestionando en forma adecuada la información obtenida; emplear applets de manera reflexiva para inferir conceptos matemáticos; identificar los movimientos en el plano presentes en teselados; utilizar GeoGebra para el diseño de teselados y trabajar de manera ordenada y responsable.

En la presente propuesta se pretende abordar el cubrimiento del plano mediante teselados, a fin de que los alumnos puedan establecer relaciones con la realidad y reconocer los diversos movimientos implicados.

¿Qué es un mosaico o teselado? Es el cubrimiento del plano mediante piezas llamadas teselas que no pueden superponerse ni pueden dejar huecos sin recubrir, y en las que los ángulos que concurren en un vértice suman 360° . Existen muchas formas de obtener un mosaico. Los más sencillos están formados por un único tipo de polígono regular, como el triángulo equilátero, el cuadrado o el hexágono regular. Si los alumnos cuentan con conexión a Internet, sería interesante que busquen y elijan imágenes de teselados en Internet y que las guarden en sus equipos.

 www.mcescher.com

La página está en inglés, pero utilizando el traductor de Google se puede leer en castellano [consultado el 24/3/2011].

1. Pueden proponerles a sus alumnos que visiten el [sitio del holandés M. C. Escher](#), uno de los artistas gráficos más grandes del siglo xx. Algunas de sus obras ponen en juego movimientos como los que se pretenden trabajar en la clase. Se les podría pedir a los alumnos que conozcan al artista a partir de la lectura de su biografía y que luego se detengan en sus obras de arte *Symmetry*.

Luego, sería interesante generar un momento de diálogo con los alumnos a partir de alguna de las obras del autor, con la intención de indagar sobre los movimientos que se han empleado para lograr la composición. Para enriquecer este diálogo, proponemos que los alumnos exploren algunos de los applets que se encuentran en el siguiente enlace:  <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/escher.htm> [consultado el 24/3/2011].

2. Sugerimos proponerles las siguientes consignas a los alumnos:

- Elegir una de las ilustraciones sobre las teselaciones de Escher.
- Estudiar de manera reflexiva cómo se genera la composición.
- Enumerar los movimientos que se han realizado.
- Compartir con un compañero las apreciaciones realizadas y evaluar si son correctas.

- Intentar reproducir parte de alguna de las teselaciones de Escher en GeoGebra. Para ello pueden utilizar cualquiera de las imágenes que aparecen en el sitio provisto en la página anterior.
- Empleando GeoGebra y las herramientas matemáticas necesarias, crear un mosaico o teselado personal.



Cómo insertar una imagen

En primer lugar, la imagen debe estar guardada en la netbook. Para insertarla en la vista gráfica, hay que hacer clic en el ícono **Deslizador** y allí elegir la opción **Inserta imagen**. Luego, hacer clic en la zona de la vista gráfica en la que se desea insertar la imagen. Allí se abre una ventana desde la cual se puede elegir la imagen deseada.

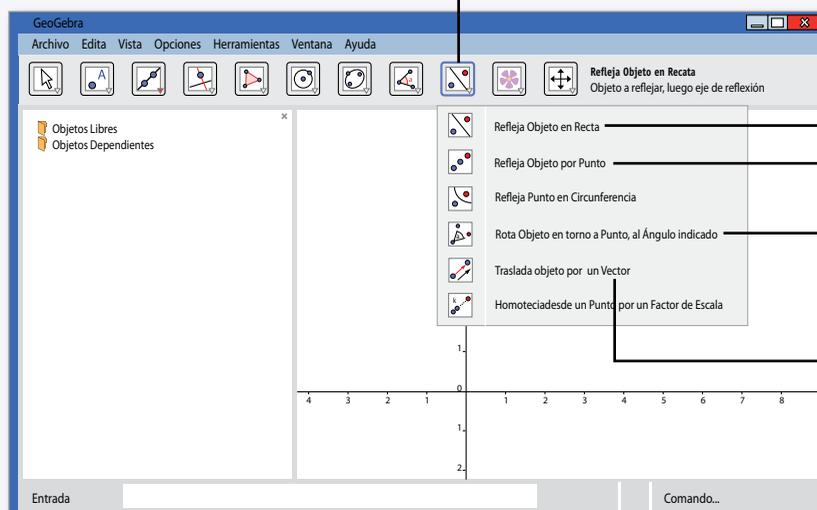


Cómo realizar movimientos

Las transformaciones que se utilizan en esta propuesta son las señaladas en la siguiente imagen:

- Simetría axial. Seleccionar el objeto a ser reflejado. Luego, hacer clic sobre la recta (semirrecta o segmento) para que quede establecido el eje de simetría a través del que se operará la reflexión.
- Simetría central. Seleccionar el objeto que se quiere reflejar. Luego, hacer clic sobre el punto a través del cual se operará la reflexión.
- Rotación. Seleccionar el objeto a ser rotado. Luego, hacer clic sobre el punto que obrará como centro de rotación para que aparezca una ventana desde la cual se puede especificar la amplitud del ángulo de rotación. Luego de aceptar, se operará la rotación.
- Traslación. Seleccionar el objeto a ser trasladado. Luego, hacer clic sobre un vector para que se produzca la traslación. Previo a la traslación debe definirse un vector. Para ello en el botón **Recta que pasa por dos puntos** elegir alguna de las dos opciones que se presentan: **Vector entre dos puntos** o **Vector desde un punto**.

Transformaciones geométricas



Simetría axial

Simetría central

Rotación

Traslación

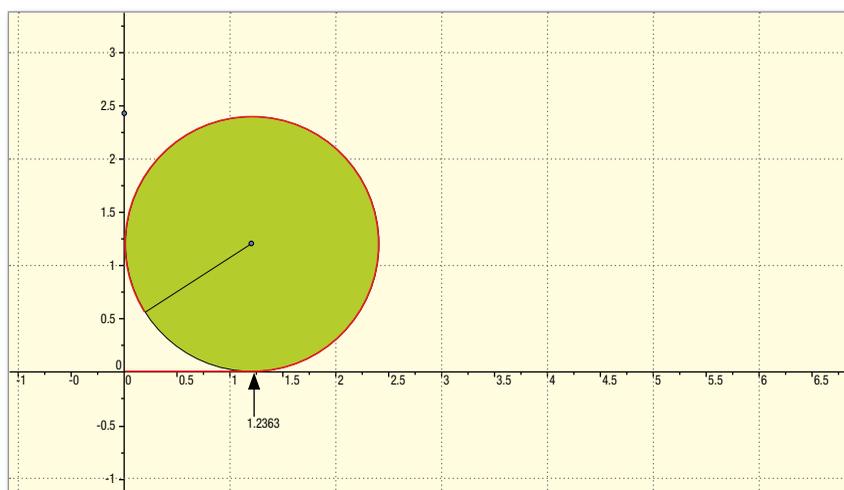
3

Tareas de investigación

Secuencia didáctica n.º 4 Longitud de la circunferencia

En esta secuencia se pretende que los alumnos puedan investigar y deducir, a partir de la interacción con un applet, la fórmula que permite calcular la longitud de una circunferencia. En este proceso descubrirán la existencia del número π y su valor aproximado.

Les sugerimos iniciar la clase proponiendo a los alumnos que, en pequeños grupos de trabajo, cada uno con su netbook, exploren el applet “Longitud de una circunferencia” que se encuentra en http://www.geogebra.org/en/upload/files/xuxo/geogebra_cobaem/circunferencia_perimetro.html.



El autor de este applet ha incluido una serie de cuestiones para orientar el estudio del tema. Los docentes pueden optar por utilizar, descartar o modificar esas cuestiones –que veremos a continuación– según los grupos de alumnos y los objetivos que se hayan propuesto.

1. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia de diámetro 1?
2. Volvé a la posición inicial y desliza ahora el punto azul hasta visualizar la circunferencia de diámetro 2. ¿Cuál es ahora su perímetro?
3. ¿Cuántas veces más largo es el perímetro de la circunferencia que su diámetro? Probá con el círculo de diámetro 6 (hacer zoom a la imagen dando clic derecho sobre la zona gráfica y eligiendo zoom y 25%).

4. ¿Cómo puede calcularse el perímetro de un círculo (circunferencia) conociendo su diámetro?

5. ¿Cómo explicarías qué es pi?

Una vez que los alumnos hayan finalizado esta primera parte, es oportuno que se realice una puesta en común en relación con las conclusiones a las cuales ha arribado cada grupo.

Seguramente se planteará el interrogante “¿qué es π ?”. Es un buen disparador para promover la búsqueda y gestión de información que permita dar respuesta a la inquietud presentada. Sugerimos que el docente les proponga a los alumnos investigar en la web:

- Definición de π
- Valor de π
- Historia de π

Si los alumnos consultan únicamente Wikipedia, el docente puede proponer que busquen en otros sitios o bien dar una lista de enlaces que previamente haya evaluado. Por ejemplo:

- Bienvenido a la página de pi. Alrededor de pi:
<http://webs.adam.es/rlllorens/pihome.htm>
- Red Escolar. ¿Qué es pi?:
http://redescolar.ilce.edu.mx/educontinua/mate/lugares/que_es_pi/pi.htm



Para finalizar la clase, y a modo de institucionalización del tema, les sugerimos emplear un video de Adrián Paenza en el cual se refiere al número en cuestión (capítulo 13 de Alterados por pi, de Canal Encuentro). Pueden encontrar un fragmento del programa en <http://www.encuentro.gov.ar/nota-2628-Buscando-al-numero-Pi.html> o bien acceder a todo el capítulo en http://descargas.encuentro.gov.ar/emision.php?emision_id=95.

Secuencia didáctica n.º 5

Propiedades de los ángulos de un triángulo

En esta secuencia partimos del supuesto de que los alumnos han trabajado previamente con el concepto de triángulo, sus elementos, su clasificación según sus ángulos y sus lados, su construcción dados diversos elementos tanto con lápiz y papel como también con GeoGebra, y han demostrado la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo.

Se espera que los alumnos puedan utilizar GeoGebra para resolver problemas e investigar propiedades de los ángulos de los triángulos, como así también que sean capaces de inferir las propiedades y enunciarlas correctamente.

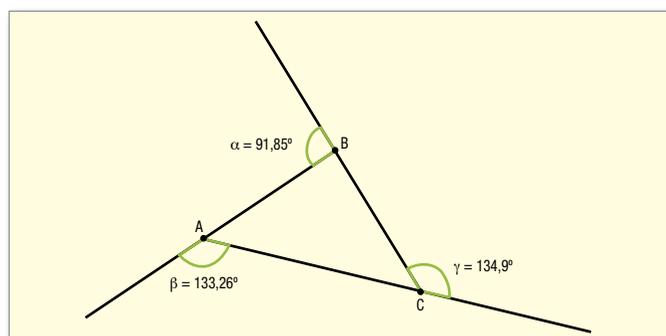
En este punto, nos interesa que los alumnos investiguen las siguientes propiedades:

- En todo triángulo, la suma de los tres ángulos exteriores es igual a 360° .
- En todo triángulo, cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

Para iniciar la clase, los alumnos pueden resolver, utilizando GeoGebra, la siguiente actividad.

1. Construyan un triángulo cualquiera y nombren a sus vértices A, B y C.
2. Señalen sus ángulos exteriores y nómbrénlos como $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$.
3. Analicen los valores de los ángulos exteriores para distintos triángulos (muevan los vértices para obtener diversas medidas) y estimen: ¿cuál es el valor de su suma?
4. Ingresen la fórmula para sumar los ángulos exteriores y comprueben la respuesta anterior.
5. Formulen la propiedad de los ángulos exteriores de un triángulo.

Posible resolución de la actividad.



Antes de continuar con la otra propiedad, sugerimos realizar una puesta en común en la que se presenten las conclusiones a las cuales se arribaron, a fin de que el docente pueda formalizar el saber construido por el grupo de alumnos.

Seguidamente, pueden sugerirles a los alumnos que resuelvan una nueva propuesta de actividades en forma grupal empleando GeoGebra,

cada uno en su netbook, y debatiendo con los compañeros las respuestas a cada consigna.

1. Dibujen un triángulo ABC cualquiera.
2. Señalen sus ángulos interiores.
3. Señalen sus ángulos exteriores y nombrenlos como $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$.
4. Completen la siguiente tabla y busquen alguna regularidad entre las medidas de los ángulos de distintos triángulos.

	\hat{A}	\hat{B}	\hat{C}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
Triángulo 1						
Triángulo 2						
Triángulo 3						
Triángulo 4						

Si los alumnos no están habituados a este tipo de trabajo de investigación y de búsqueda de regularidades, se puede proponer esta otra tabla que dirige un poco más el establecimiento de las relaciones.

	\hat{A}	\hat{B}	$\hat{\gamma}$
Triángulo 1			
Triángulo 2			
Triángulo 3			
Triángulo 4			

5. Enuncien la conclusión a la cual arribaron en el punto 4.

Sugerimos al docente finalizar la propuesta socializando los razonamientos de los alumnos y formulando correctamente los enunciados de las propiedades inferidas. Para una próxima intervención sería adecuado, en función del grupo, continuar con las demostraciones matemáticas de estas propiedades.

4

Tareas de justificación

Secuencia didáctica n.º 6 Ángulos inscritos y semiinscritos

Esta secuencia tiene como objetivos: inferir propiedades a partir del uso de applets y de GeoGebra; formular propiedades utilizando el lenguaje matemático apropiado, y crear situaciones problemáticas y resolverlas.

Sugerimos proponer a los alumnos que trabajen con el applet que encontrarán en el siguiente enlace: http://www.geogebra.org/en/upload/files/xuxo/geogebra_cobaem/circunferencia_angulo.html [consultado el 25/3/2011].

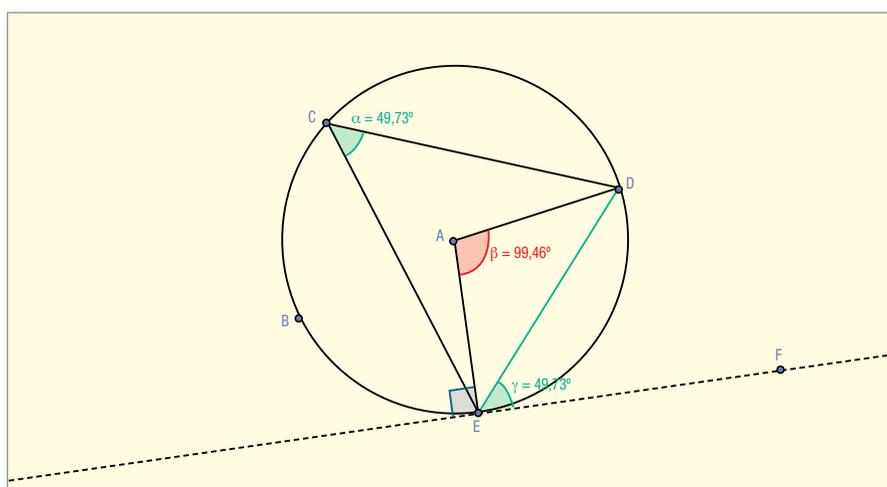
Cada alumno en su netbook podría comenzar interactuando en forma libre con el applet y luego responder los interrogantes que se plantean en la misma pantalla, para socializar luego las respuestas con su grupo de trabajo.

Cuando todos los grupos finalicen, sería conveniente realizar una puesta en común en la que se logre arribar al enunciado de las propiedades:

- “Todo ángulo inscrito en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.”
- “Todo ángulo semiinscritos en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.”

A continuación, proponemos solicitar a los alumnos que demuestren la primera propiedad para el caso en que el centro pertenezca a uno de los lados del ángulo inscrito. Se espera que los alumnos puedan realizar un procedimiento similar al siguiente ayudándose con una construcción realizada en GeoGebra:

En el applet se hace referencia al ángulo exinscrito como semiinscrito.



Una vez finalizada la tarea, sería conveniente generar una puesta en común en la que los alumnos se vean en la necesidad de formular sus conjeturas utilizando un lenguaje matemático adecuado y verificando matemáticamente las propiedades inferidas.

Sugerimos recuperar los aportes de los alumnos utilizando alguna de las representaciones realizadas por ellos e institucionalizar las propiedades deducidas.

Cómo graficar ángulos

Para graficar una circunferencia se hace clic en el **botón A** y se elige alguna de las tres primeras opciones, dado que se necesita el centro.

Luego se marcan los puntos sobre la circunferencia que determinan el ángulo central.

Para señalar el ángulo, se hace clic en el **botón B** eligiendo la primera opción. Para delimitar el ángulo se debe hacer clic en los tres puntos que lo determinan. Hay que tener en cuenta que el orden en que se ingresan los puntos determina si el ángulo a presentar es cóncavo o convexo.

Se observará que no se marcan los lados del ángulo. Para ello se deben trazar los segmentos correspondientes mediante la segunda opción del **botón C**.



botón A



botón B



botón C

Secuencia didáctica n.º 7 Suma de los ángulos interiores de polígonos

Esta secuencia tiene como objetivos que los alumnos infieran la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono y que utilicen el programa GeoGebra para la resolución de situaciones problemáticas. Les sugerimos presentar a sus alumnos las siguientes actividades para resolver en pequeños grupos, trabajando cada uno con su netbook, y confrontando permanentemente con sus pares las construcciones y resultados obtenidos.

1. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de los polígonos que figuran en el cuadro?
 - a) Construir los polígonos en GeoGebra.
 - b) Calcular la suma de los ángulos interiores de cada uno utilizando las herramientas del programa.

c) A partir de lo observado, completar un cuadro como el siguiente:

POLÍGONO	CANTIDAD DE LADOS	SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES
Triángulo		
Cuadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		
Octógono		
Eneágono		

2. Conservando los grupos armados al principio de la actividad, estudiar los resultados obtenidos y responder:

¿Qué tienen en común los resultados obtenidos en la última columna?
 ¿Hay alguna forma de prever cuánto va a ser la suma de los ángulos interiores de un decágono, un dodecágono o un icoságono? Pensar una fórmula que refleje su razonamiento y probar si es válida.

Una vez que los alumnos hayan concluido las actividades, es recomendable que se genere una puesta en común a fin de socializar las producciones de cada grupo. El docente puede orientar el debate a fin de arribar a la fórmula que permite el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono: $\text{Suma de áng. int.} = 180^\circ (n - 2)$

A continuación, se puede pedir a los alumnos que expliquen la fórmula obtenida. Se pretende que puedan vincular la cantidad de triángulos que quedan determinados por las diagonales que concurren en uno solo de los vértices de cualquier polígono.

Aconsejamos cerrar la intervención institucionalizando el saber elaborado por los alumnos para darle carácter formal.

Cómo graficar polígonos

Para graficar polígonos de n lados, hacer clic en el botón **Polígono**. Luego, hacer clic en la vista gráfica tantas veces como lados tenga el polígono deseado.

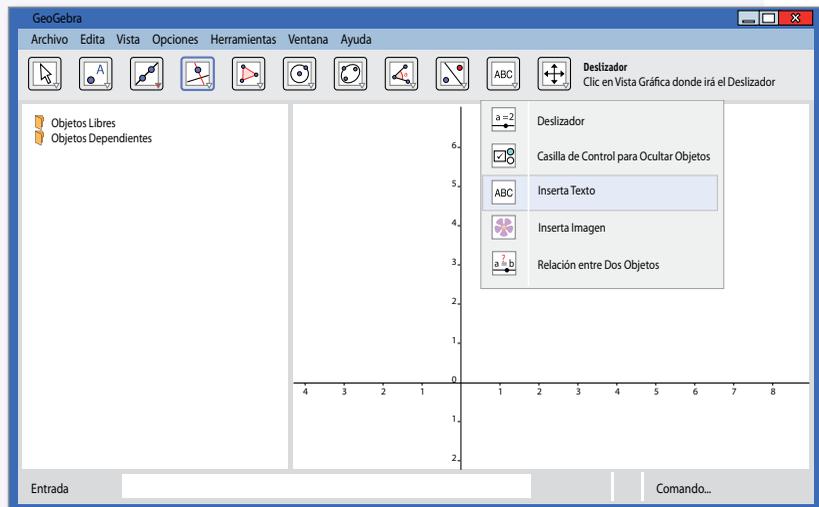
Si se desea construir un polígono regular, basta con elegir esa opción desde el mismo botón de la barra de herramientas.





Cómo calcular la suma de los ángulos

Para que el programa calcule y visualice la suma de los ángulos interiores, se debe insertar un texto haciendo clic en el botón **Deslizador** y elegir **Inserta texto**. Se abre una ventana y en ella se debe introducir el siguiente texto (en este caso, para un pentágono): “Suma de los cinco ángulos =” + $(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)^\circ$. Hay que tener en cuenta que si no se agrega “/°” el resultado será 180, dado que GeoGebra asume que la suma debe estar comprendida entre 0° y 360° . Esta notación quiere decir $x^\circ = 180x/\pi$



Secuencia didáctica n.º 8 Ángulos determinados por rectas paralelas

Esta secuencia tiene como objetivos inferir propiedades de los ángulos y verificar los enunciados utilizando argumentos válidos, emplear GeoGebra para resolver situaciones problemáticas y trabajar en forma colaborativa con sus pares.

En clases previas se ha trabajado con los alumnos la clasificación de los ángulos comprendidos entre dos paralelas cortados por una transversal. De esta forma, los alumnos son capaces de identificar cuáles son los ángulos alternos internos y externos, conjugados internos y externos, y correspondientes. También han comprobado que los ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes. Se pretende ahora que los alumnos infieran y prueben las propiedades de los ángulos alternos. Para ello, sugerimos trabajar consignas como las siguientes:

1. Con tu netbook, en GeoGebra, trazá dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Luego:
 - a) Ubicá un par de ángulos alternos externos.
 - ¿Cómo son entre sí?
 - ¿Qué ocurre si modificás la dirección de la transversal o de las paralelas? ¿Cómo resultan las amplitudes de los ángulos?
 - ¿Esto ocurre también para el otro par de ángulos alternos externos?
 - b) Ubicá un par de ángulos alternos internos.

- ¿Cómo son entre sí?
- ¿Qué ocurre si modificás la dirección de la transversal o de las paralelas? ¿Cómo resultan las amplitudes de los ángulos?
- ¿Esto ocurre también para el otro par de ángulos alternos internos?

2. Trabajá con un compañero:

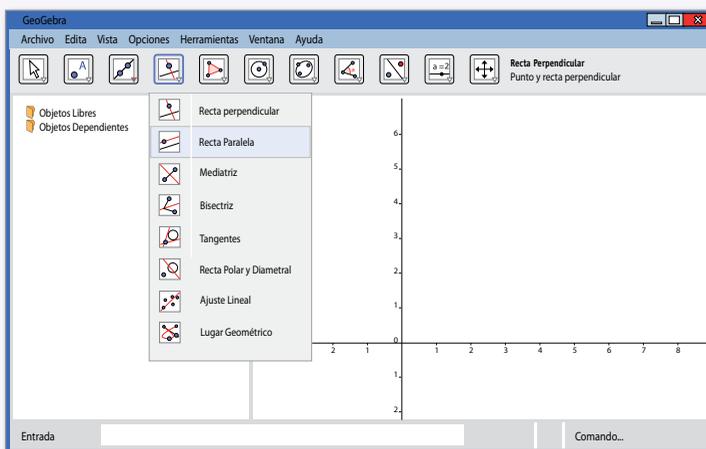
- Enuncien las propiedades que verifican los ángulos alternos entre paralelas.
- Intenten probar los enunciados de las propiedades descubiertas.

Una vez finalizada la tarea, resulta oportuno generar una puesta en común en la que los alumnos tengan la necesidad de formular sus conjeturas utilizando un lenguaje matemático adecuado y verificar matemáticamente las propiedades inferidas.

Sugerimos recuperar los aportes de los alumnos utilizando alguna de las representaciones realizadas por ellos e institucionalizar las propiedades deducidas.

Cómo graficar rectas paralelas

Se elige la opción **Recta que pasa por dos puntos**, que se encuentra cuando se despliega la caja del segundo botón del menú. Una vez graficada la primera recta, para representar una paralela se elige la opción **Recta paralela** desde el cuarto botón del menú.



Cómo señalar ángulos

Para poder representar ángulos, es preciso antes señalar los puntos necesarios sobre las rectas para poder determinarlos. Lo interesante de la construcción lograda es que el alumno puede mover las rectas, con lo cual los valores iniciales se van modificando. Hay que tener en cuenta que GeoGebra no trabaja con medidas en sistema sexagesimal.

Conclusión

Hasta aquí hemos presentado algunas secuencias didácticas que pueden ser orientativas sobre cómo incorporar el uso de GeoGebra en la enseñanza de la Geometría.

Las nuevas tecnologías abren un nuevo abanico de posibilidades para enseñar en la escuela secundaria. Estamos convencidos de la necesidad de enseñar Matemática a partir de la resolución de problemas involucrando al alumno en un proceso activo de construcción del conocimiento. El modelo 1 a 1 enriquece y potencia esta idea. El desafío que se nos presenta es construir o reconstruir prácticas áulicas aprovechando el potencial de programas como GeoGebra.

Los invitamos a diseñar secuencias didácticas propias que hagan realidad la idea de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de la modificación de las formas de trabajo en el aula y en la escuela incluyendo las TIC, uno de los objetivos del programa Conectar Igualdad.

Serie para la enseñanza en el modelo 1 a 1



conectar igualdad

www.conectarigualdad.gob.ar



Este libro se terminó de imprimir
en el mes de octubre de 2011,
en Gráfica Pinter, Diógenes Taborda 48,
Ciudad de Buenos Aires.

conectar igualdad

www.conectarigualdad.gob.ar



Presidencia de la Nación



Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación



ANSES



material de distribución gratuita