Apoyo al último año de la secundaria
para la articulación con el Nivel Superior

Cuaderno de trabajo
para los docentes

Resolución de problemas

Matemática

ELABORACIÓN DEL MATERIAL

Coordinación pedagógica:
Mónica Agrasar
Graciela Chemello

Coordinación autoral:
Nelci Noemi del Carmen Acuña

TEMA DISEÑAR...
Colaboradoras:
Selva Beatriz Toledo
Anabell Rodriguez

TEMA ARGUMENTAR...
Autora:
Nelci Noemi Acuña
Colaborador:
Jose Luis Mazzega

TEMA DECIDIR...
Autora:
Lillian Teresita Buyatti
Colaboradora:
Edit Molinaro

EDICIÓN Y CORRECCIÓN DE ESTILO
Eudeba

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN
Unidad de Información y Comunicación
GABRIEL FABIÁN LEDESMA
MARIO PESCI

DISEÑO DE TAPAS
Campaña Nacional de Lectura
MICAELA BUENO

Primera edición: Abril de 2007

PRESIDENCIA DE LA NACIÓN
Dr. Néstor Kirchner

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Lic. Daniel Filmus

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
Lic. Juan Carlos Tedesco

SECRETARÍA DE POLÍTICAS UNIVERSITARIAS
Dr. Alberto Dibbern

SUBSECRETARÍA DE EQUIDAD Y CALIDAD
Lic. Alejandra Birgin

SUBSECRETARÍA DE PLANEAMIENTO EDUCATIVO
Lic. Osvaldo Devries

SUBSECRETARÍA DE POLÍTICAS UNIVERSITARIAS
Lic. Horacio Fazio

DIRECCIÓN NACIONAL DE GESTIÓN CURRICULAR
Y FORMACIÓN DOCENTE
Lic. Laura Pitman

DIRECCIÓN NACIONAL DE INFORMACIÓN
Y EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA
Lic. Marta Kisilevsky

COORDINACIÓN DE ÁREAS CURRICULARES
Lic. Cecilia Cresta

COORDINACIÓN DEL PROGRAMA DE
“APOYO AL ÚLTIMO AÑO DEL NIVEL SECUNDARIO
PARA LA ARTICULACIÓN CON EL NIVEL SUPERIOR”
Lic. Vanesa Cristaldi

COORDINACIÓN DEL PLAN NACIONAL DE LECTURA
Dr. Gustavo Bombini

1. Introducción

1.1. El sentido del trabajo propuesto

Los cuadernos sobre textos con información matemática han sidos concebidos como un recurso para orientar el desarrollo de un período de doce horas de trabajo con estudiantes que están finalizando la escuela media. El tipo de propuesta que se presenta no tiene como finalidad hacer avanzar a los alumnos en el aprendizaje de contenidos conceptuales más allá de los adquiridos en el nivel, sino favorecer la articulación de esos conocimientos al interactuar con textos cuya comprensión requiere la interpretación de información cuantitativa. Un lector competente debería poder interpretar las cuestiones matemáticas involucradas en textos de otras disciplinas, y comprender cómo se utilizan los modelos matemáticos para describir, analizar y predecir fenómenos de las ciencias naturales o sociales o procesos tecnológicos.

Además, es importante que el alumno en su escolaridad haya desarrollado la habilidad de pensar y hacer matemáticas, de resolver problemas. Ser capaz de reconocer los límites y la extensión de los conceptos matemáticos, evaluar argumentos matemáticos, plantear problemas matemáticos, seleccionar entre diversas formas de representar situaciones y comunicarse respecto de cuetiones con contenido matemático. Poder, del mismo modo, aplicar estos conocimientos, comprensiones y habilidades en variados y numerosos contextos, tanto personales como sociales y laborales. Este conocimiento resulta fundamental tanto para quienes deseen seguir estudios superiores como para todo ciudadano que necesita interpretar la información y tomar decisiones.

Se presentan en este material para estos propósitos algunos problemas propios de la matemática misma y de aplicación en otras disciplinas.

Retomamos la relación entre la matemática en la sociedad y la cultura y para ello recuperamos las ideas del Dr. Guy Brousseau quien expresa, al referirse a los mismos de la siguiente manera:

"Siempre nos hemos preguntado cuáles son los aportes de los conocimientos matemáticos "necesarios" para la educación y la sociedad y cómo llevar a cabo dichos aportes. Los textos acerca de la finalidad de las matemáticas abundan. Explican la necesidad, para una sociedad, de que cada ciudadano disponga de una cultura matemática suficiente, y a la vez, la necesidad social de disponer de la cantidad suficiente de técnicos y de científicos para enfrentar los desafíos del futuro. Todo tiende a convencernos de que las matemáticas jugarán en ello un papel importante. Dichos textos explican también la importancia de las propiedades formativas inherentes a las matemáticas, tanto a nivel individual, por las capacidades que parecen desarrollar, como a nivel de la vida colectiva. El comportamiento racional de una sociedad, es decir, su relación tanto con la verdad como con la realidad, no descansa únicamente en las virtudes individuales de sus miembros. Exige una práctica social y una cultura que deben enseñarse en la escuela. Las matemáticas constituyen el campo en el que el niño puede iniciarse más tempranamente en la racionalidad, en el que puede forjar su razón en el marco de relaciones autónomas y sociales."[1]

Tratando de lograr esta cultura matemática en el marco de relaciones autónomas y sociales, con este material se buscará profundizar en un tratamiento de los conocimientos centrado en algunos de los procedimientos propios de esta discipli-

[1] Guy Brousseau. Profesor emérito del IUFM de Aquitaine (Francia). En su trabajo: Educación y Didáctica de las matemáticas presentado en el V Congreso Nacional de Investigación Educativa. Aguascalientes, Ags. 30 y 31 de octubre y 1º y 2 de noviembre de 1999.

na y en la reflexión sobre ellos de modo que los alumnos adviertan si disponen efectivamente de ellos en las ocasiones en que éstos son necesarios. En este sentido, conviene tener en cuenta diferentes aspectos de las formas de trabajar en matemática: los procedimientos ligados a la resolución de problemas, a las formas de razonamiento y a la comunicación usando el lenguaje propio.

Con respecto a la resolución de problemas, la sociedad moderna reclama cada vez más a todo ciudadano, una formación que le permita enfrentarse a situaciones de diferente índole en forma autónoma, encontrando una respuesta y teniendo algún control sobre la misma. En la mayoría de los casos, se le plantean problemas que implican hallar respuestas nuevas a preguntas también nuevas.

Esto se da tanto en entornos cotidianos como laborales, que se modifican en plazos cada vez más cortos dando lugar a la aparición de problemas referidos a cuestiones difíciles de anticipar, como en el entorno de los estudios superiores que tomarán esta capacidad como punto de partida.

La especificidad del tratamiento de los problemas en esta área se vincula con la naturaleza del conocimiento matemático: numerosos matemáticos consideran el planteo y la resolución de problemas como el eje primordial de su trabajo.

1.2. Puntos de partida para pensar la gestión de la clase.

En el libro del alumno se plantean actividades que deberían ser organizadas siguiendo algunas de las ideas que desarrollaremos a continuación:

En el caso de la *práctica matemática* de los alumnos, un trabajo con problemas que los prepare para enfrentarlos en forma autónoma debiera dar lugar tanto a la toma de deci-siones como al debate a propósito de procedimientos, resultados y conclusiones. Interesa que los alumnos tomen decisiones respecto de la resolución del problema, considerando las relaciones entre datos e incógnitas, respecto de los procedimientos y representaciones que utilizan en la resolución, y respecto de la elaboración de argumentos que validen sus producciones. Este tipo de trabajo favorece que los alumnos asuman actitudes de toma de iniciativa, de confianza en sus posibilidades, de aceptación de críticas y formulación de preguntas. Asimismo, una práctica de resolución de problemas como la descripta implica la puesta en juego de diferentes formas de razonamiento y de comunicación.

En cuanto a las *formas de razonamiento,* los alumnos deberán tener la ocasión de involucrarse en una búsqueda que contemple la elaboración de conjeturas; la experimentación con diferentes ejemplos, la búsqueda de contraejemplos, la elaboración de argumentaciones, de demostración y un debate acerca del control de resultados y de la evaluación de su pertinencia en función del problema en estudio.

De tal modo, el ámbito de trabajo matemático también favorece el desarrollo del pensamiento crítico y de cualidades de iniciativa, de la imaginación, de la creatividad, en el marco de investigación de pruebas, de elaboración de argumentos, de manera que los alumnos adquieran confianza en sus capacidades de analizar producciones propias y ajenas, de argumentar a favor o en contra de las mismas, defendiendo su punto de vista y aceptando críticas de otros.

Durante el *debate,* cada alumno defiende su razón, toma conciencia de otras razones escuchando a sus compañeros y esto le permite hacer evolucionar sus representaciones. Partiendo de la sinceridad de los participantes, es necesario acordar en el grupo que los significados asignados a los valores de verdad son los siguientes: cuando, por ejemplo, se afirma que un enunciado es “verdadero” es porque se tienen razones científicas para pensar que lo que se afirma es verdad, y no es por indiferencia o porque no se tienen argumentos racionales suficientes para decidir, o que se está dividido entre dos argumentos contradictorios, o porque se piensa que el problema está mal planteado o es ambiguo. Al participar del debate, el alumno estará dispuesto a explicar las razones de sus dudas, a pedir explicaciones y precisiones y a examinar de forma crítica las pruebas de aquellos que parece que ya han podido decidir racionalmente.

Respecto de la *posibilidad de comprender o formular ideas matemáticas,* es fundamental en la comunicación escrita que se pueda interpretar lo leído en ausencia del autor, lo que establece una diferencia esencial con la comunicación oral que permite la negociación de los significados atribuidos a las expresiones utilizadas. Para que el significado atribuido por el lector a un texto sea admisible en términos de la cultura matemática, deberá ajustarse al que se considera válido en ella; su aprendizaje es, en la enseñanza formal, una parte esencial de esta disciplina.

El lector de matemática se enfrenta con diferentes tipos de expresiones, tanto verbales como simbólicas, gráficas y geométricas. Por una parte, existen expresiones en español que incluyen palabras con un uso y un significado propio en la práctica matemática, diferente del significado que tienen en el lenguaje coloquial. Entre los muchos ejemplos que se podrían mencionar está el caso del término “hipótesis”, que en matemática designa a los elementos y propiedades que se consideran como puntos de partida de una demostración y fuera de ella como teoría no probada. En el caso de términos derivados de la lógica, como es el caso de “todos”, su uso no tiene la misma rigurosidad fuera de la matemática que dentro de ella.

En cuanto a *las expresiones simbólicas, gráficas y geométricas,* el lector necesita establecer relaciones entre la representación que encuentra en el texto y el concepto matemático al que se refiere, y por lo tanto será necesario que conozca las diferentes representaciones posibles de un mismo concepto.

Si las expresiones sólo incluyen símbolos matemáticos, para asegurar su comprensión es conveniente proponer a los alumnos que la expliciten usando un registro informal, que formulen ejemplos y, si es posible, que las interpreten gráficamente. Resulta imprescindible asegurarse no sólo que los alumnos interpreten cada símbolo, sino también que logren apropiarse del sentido completo de las expresiones.

En el caso de *analizar gráficos*, es interesante incluir preguntas que promuevan una comprensión profunda de las relaciones representadas y que no se dirijan sólo a los aspectos ligados a una apreciación visual.

Con respecto a la *resolución de problemas*, la sociedad moderna reclama cada vez más a todo ciudadano, una formación que le permita enfrentarse a situaciones de diferente índole en forma autónoma, encontrando una respuesta y teniendo algún control sobre la misma. En la mayoría de los casos, se le plantean problemas que implican hallar respuestas nuevas a preguntas también nuevas. Esto se da tanto en entornos cotidianos como laborales, que se modifican en plazos cada vez más cortos dando lugar a la aparición de problemas referidos a cuestiones difíciles de anticipar, como en el entorno de los estudios superiores que tomarán esta capacidad como punto de partida.

La especificidad del tratamiento de los problemas en esta área se vincula con la naturaleza del conocimiento matemático: numerosos matemáticos consideran el planteo y la resolución de problemas como el eje primordial de su trabajo.

Por último, conviene señalar que el *tratamiento en el aula de los conocimientos procedimentales* incluye la vuelta reflexiva sobre las formas de resolución, razonamiento y comunicación empleadas. Esto permite tematizarlas y elaborar conclusiones que permiten una mejor reutilización de las mismas a futuro. Fundamentalmente, el trabajo en las distintas actividades planteadas debería ofrecer a los participantes, la oportunidad para revisar los propios aprendizajes, dar cuenta de las propias capacidades y para asumir responsablemente tanto sus logros como sus dificultades.

1.3. La propuesta de trabajo

La propuesta se desarrolla a partir de la presentación de un tema o problema cuyo estudio puede ser profundizado mediante una selección de textos con información matemática, y un conjunto de actividades para su comprensión, que dan lugar al uso de distintos conocimientos matemáticos. Frente a estos problemas, la Matemática aparece como una herramienta útil que permite modelizar algunos aspectos de los fenómenos en estudio.

En relación a la *interpretación de la información* que se presenta, se considera conve-niente trabajar las relaciones que pueden establecerse entre los distintos conjuntos de datos que, aislados del contexto que los produjo, son factibles de distorsión y manipulación. Se pretende que el trabajo favorezca la argumentación basada en datos empíricos, y apunte a la comprensión de la gran masa de información numérica que hoy se recibe a través de los distintos medios de comunicación.

Si bien la Matemática sirve a las otras ciencias como herramienta de análisis y modelización, se hace necesaria una vuelta a los contenidos propios de la disciplina.

Apelando a los *contenidos escolares*, en cada eje temático se propone recuperarlos desde lo elemental: razón y proporción, proporcionalidad numérica y geométrica, semejanza de figuras, escala, vector, razones irracionales como $\sqrt{2}$ y el número θ, Teorema de Thales, ecuaciones lineales, matrices y determinantes, Teorema de Pitágoras y las ternas pitagóricas, operaciones con números figurados y demostración de alguna de ellas, métodos de demostración en matemática, elaboración de conjeturas e identificación de paradojas matemáticas.

Corresponde reflexionar acerca de la *adecuación de los resultados* obtenidos a las situaciones planteadas propiciando el análisis de la información, la formulación de conjeturas e hipótesis, la justificación de las decisiones, la defensa de las argumentaciones, fomentado a través de las interacciones grupales en las que los resul-tados personales se expongan y se discutan.

Las características, intereses y conocimientos disponibles de cada grupo de alumnos, y las fortalezas profesionales de cada docente, llevarán necesariamente a realizar una selección de actividades que las contemplen. En este sentido, se ofrece una colección que, si bien se organiza en una secuencia, admite distintos y variados recortes. Es más, al organizar el encuentro de trabajo es posible pensar que todos los alumnos aborden las mismas actividades o que éstas se distribuyan entre distintos grupos para realizar una presentación final en la que se articulen las conclusiones.

En particular, en las últimas actividades de los capítulos se plantea la recuperación de los procedimientos matemáticos utilizados al resolver algunos problemas, para reflexionar sobre ellos y explicitar los conocimientos involucrados. En este sentido, es importante tener en cuenta que estos problemas queden incluidos en la selección de actividades que se realice.

Resaltamos las ideas de ERMEL (Equipo de investigación sobre la enseñanza de la Matemática, perteneciente al Instituto Nacional de Investigación Pedagógica de Francia) respecto a la resolución de problemas y las capacidades a desarrollar:

“- *saber qué es lo que se busca, ser capaz de representarse y apropiarse la situación;*
- *ser capaz de concentrarse el tiempo suficiente y también de descentrarse, cambiar su punto de vista;*
- *ser capaz de movilizar en el buen momento los saberes y los saber-hacer anteriores;*
- *ser capaz de guardar la traza de sus ensayos, de organizarse, de planificar, de gestionar la información que se dispone, ya sea dada o que sea necesario buscarla o construirla;*
- *atreverse a actuar, a arriesgarse, a equivocarse;*
- *poder formular, comunicar sus hipótesis, sus certidumbres, sus estrategias;*
- *ser capaz de controlar el estado de su procedimiento, medir la distancia que lo separa de la solución;*
- *ser capaz de validar, probar, etc.*

Para que un alumno se apropie de una situación es necesario que pueda: comprender cuál es la situación que se le plantea, comprender qué es lo que se busca e iniciar procedimientos de resolución cuyos resultados puedan ser evaluados”.

Respecto dela gestión y organización de la clase plantean que:

“Hacer matemática es también discutir las soluciones aportadas por sus pares, ponerse de acuerdo sobre esas soluciones y para eso es necesario probar, argumentar, discutir, verificar y hacer verificar, tratar de convencer, involucrarse en la búsqueda de la verdad de las afirmaciones que se realicen, no aceptar las de otros a priori, etc.

Y todo lo anterior plantea una relación diferente de los alumnos con el conocimiento, roles diferentes a los tradicionales de alumnos y docente, tanto en la clase como en la gestión de la verdad, las actitudes, etc.

Se trata de permitir la apropiación de las reglas del debate matemático que el equipo mencionado enuncia bajo la forma siguiente:

- *un enunciado matemático es verdadero o falso;*
- *un contraejemplo es suficiente para invalidar un enunciado;*
- *en matemática, para debatir hay que apoyarse en un cierto número de propiedades o definiciones claramente enunciadas sobre las cuales hay un acuerdo (axiomas);*
- *en matemática, dar ejemplos que verifiquen un enunciado no es suficiente para probar que es verdadero;*
- *en matemática, una constatación sobre un dibujo no es suficiente para probar que un venunciado de geometría es verdadero.*

Son objetivos de esta situación el debate y la institucionalización de dos de las reglas mencionadas anteriormente: un contraejemplo es suficiente para probar que un enunciado matemático es falso y algunos ejemplos, aunque sean numerosos no son suficientes para probar que un enunciado matemático es verdadero.

Es necesario que los alumnos tengan en cuenta los siguientes pasos para una mejor organización en su quehacer matemático:

1º) Lectura del problema y primeros intentos de resolverlo en forma individual.

2º) Resolución en grupo. Presentar el o los resultados o las ideas del grupo y una explicación para convencer a los otros de la validez de sus resultados.

3º) Debate colectivo sobre los resultados.

4º) Síntesis sobre las reglas del debate y/o sobre la insuficiencia de ciertas pruebas que han sido puestas en evidencia en el debate.

La búsqueda individual permite que cada alumno se apropie de la situación e inicie un procedimiento de resolución. Cuando se organiza el trabajo en grupo tienen la posibilidad de discutir sus propuestas, pero, la necesidad de socializar los resultados del grupo los obliga a comprender las eventuales divergencias, buscar las coincidencias y a formular por escrito sus soluciones.

El debate constituye un momento fuerte del proceso, ya que se trata de confrontar las respuestas elaboradas por los distintos equipos, discutir y decidir sobre la validez de las afirmaciones, tratando de validar o rechazar los argumentos presentados por los otros equipos.

Finalmente, en el momento de síntesis, se pone en evidencia ciertas reglas del debate matemático y la insuficiencia de ciertas pruebas pragmáticas dadas por los alumnos cuya finalidad consiste en: pensar en la solución que cada uno de ellos daría finalmente al problema planteado y redactarla, opinando sobre la primera explicación dada por su grupo.

El trabajo en equipo los obliga a hablar, explicitar sus ideas de resolución, pero también a tratar de comprender las de sus compañeros.

En la confrontación entre equipos, deben buscar argumentos para convencer a los demás, ser capaz de descentrarse de su propia investigación, cuestionarse, apreciar los elementos positivos de procedimientos diferentes, validar lo que se enuncia, evaluar el grado de generalidad de cada uno, etc. En el momento de la institucionalización se identifican los procedimientos o conocimientos utilizados, construidos o modificados que pasan a constituirse en los conocimientos socialmente establecidos, nombrados convencionalmente, que pasan a formar parte del bagaje de saberes evaluables de los alumnos de ese curso.

Finalmente, los alumnos se enfrentan a un trabajo individual de recapitulación, de decisión personal después del debate sobre los argumentos y de revisión de la primera producción de su equipo.

Estas ideas nos parecen fudnamentales en el momento de plantear el funcionamiento del taller y en base a las mismas se han elabordo las propuestas de actividades que incluyen momentos de trabajo individual, grupal, confrontación de ideas recreando las relgas del debate y producción del conocimiento matemático, elaboración de conjeturas, argumentaciones y demostraciones, o escrtiruas de textos que incluyan expresar sus ideas y explicaciones en distintos tipos de registros.

**2. Consideraciones sobre las temàticas elegidas
y las actividades propuestas en el Cuaderno del alumno.**

Diseñar...

¿Qué relaciones elegir?

2.1. Diseñar ...
¿qué relaciones elegir?

"¿Cómo crear contextos adecuados
para poder enseñar matematizando?...
Necesitamos problemas matemáticos que tengan
un contexto significativo para los estudiantes"

H. Freudenthal, 1983.

El "mundo real" significa el entorno natural, social y cultural donde vivimos. Y desde las matemáticas deseamos educar para que las personas puedan beneficiarse de la cultura matemática para actuar, lo mejor posible, en este mundo real que es su mundo. Actuar a nivel personal, social y profesional tanto en el presente inevitable como en el futuro previsible.

Nuestro entorno físico y conceptual tiene un alto nivel de complejidad. Para abordar su estudio necesitamos modelar la realidad extrayendo aquellos parámetros que sean significativos, para su análisis, y a la vez que sean suficientes para poder obtener conclusiones. Como señala C. Alsina (1988):

> "*El viejo sueño de la geometría fue precisamente ser el lenguaje adecuado para describir y transformar estos entornos en sus vertientes mas elementales y a la vez más profundas: las dimensiones, las formas, los movimientos, las relaciones cualitativas y cuantitativas, etc. El entorno en su sentido más amplio, ha sido y seguirá siendo, el gran reto, manantial y fuente de los estudios geométricos, no solo para motivar descripciones y modelos, sino, lo más interesante, para que con dichos resultados geométricos pueda incidirse en la transformación de la realidad."*
>
> *Es la propia realidad la que ha servido de modelo al hombre para crear y abstraer nuevas formas, o para describir y desarrollar diversas relaciones que, deducidas de las reales, han podido encontrar mediante un proceso de experimentación, reflexión y generalización. En este proceso ha ido eliminando aquellos factores que se han manifestado como irrelevantes, produciéndose un camino de abstracción que le ha conducido al reconocimiento de estructuras generales y particulares.*[3]

El uso de modelos simples, con pocos parámetros, simplifica la realidad y el estudio. La consideración de parámetros adicionales mejora el modelo, nos acerca a la realidad, pero aumenta la complejidad del análisis. El equilibrio coste-beneficio depende de los objetivos buscados.

En este caso se busca introducir al alumno en la investigación matemática, guiándole en la elaboración de modelos matemáticos asociados a la idea de "belleza" (entre comillas, pues ¿qué es la belleza?). Para ello nos basamos en el estudio de una realidad física, tangible, que se manifiesta en diferentes soportes o agentes

[3] Grupo Beta (1990) "Proporcionalidad Geométrica y semejanza" Editorial Síntesis. Pág. 118

portadores de “belleza”, tal como se entendieron en diferentes épocas y culturas, como son la figura humana representada en esculturas, pinturas o fotos, y los edificios arquitectónicos. Sobre las relaciones entre matemática y arte, plantea Luis Santaló:

> *Dejando de lado la cuestión de si la matemática en si es arte o, incluso, una bella arte, es indudable que ha intervenido en muchas creaciones artísticas y que se puede observar, mas o menos ocultas, ideas y métodos de la matemática en muchas otras obras plásticas. Se podrían citar varios ejemplos. La razón áurea, tan estudiada por Luca Paccioli (1445-1514) en su Divina Proporción, y también por Leonardo da Vinci, ha prestado un gran servicio en diferentes épocas, tanto a la arquitectura (desde la Grecia clásica y los consejos de Vetrubio – siglo I a. C. – de no descuidar la semejanza en la composición de las distintas partes, ni la de estás con el todo) como en la pintura, en la proporciones de los cuadros y sus figuras. A lo largo de los siglos, las proporciones áureas también han sido tenidas en cuenta en la tipografía de los libros, por lo que respecta a la forma de las paginas y a los proporciones entre los márgenes y la parte del texto, con el objeto de embellecerlos. Respecto a este tema, puede consultarse la obra de Lagerstrom, Tipografía del libro (Estocolmo 1950).*
>
> *Una de las características del arte es la creatividad. Suele decirse –aunque la diferencia no sea demasiado explicita- que el artista crea y que el científico descubre. Así, las obras de arte no habrían existido nunca sin el artista que las creó, mientras que los descubrimientos científicos se habrían realizado tarde o temprano. Por ejemplo, La Gioconda no habría existido nunca sin Leonardo (1452-1519), ni La Pietà sin Miguel Ángel (1475-1564), ni Las Meninas sin Velásquez (1599-1660), ni el Himno a la Alegría sin Beethoven (1770-1827). En cambio, el bacilo de la tuberculosis ya existía cuando Koch (1843-1910) lo descubrió, como ya existía la electricidad antes de Volta (1745-1827) y la energía atómica antes de Fermi (1901-1954), de manera que sus contribuciones al campo de la ciencia no fueron creaciones, sino descubrimientos.*[4]

La introducción de una razón o cociente de dos medidas, la proporción, nos da la base matemática del modelo. El análisis de las propiedades de la semejanza de rectángulos nos permitirá comprender el modelo matemático y contrastarlos con la realidad, nos conducirá a conocer sus limitaciones y sus virtudes. Y a partir de la compresión, obtendremos nuevas conclusiones y nos plantearemos nuevas cuestiones, que nos llevarán a modelos más complejos. Usaremos el conocimiento para conocer. Aprenderemos a aprender.

[4] SANTALÓ, Luís “La Matemática: Una Filosofía y una Técnica” .Pág. 14 y 15

2.1.a. Sobre el Capítulo 1: Diseñar Objetos

En este capítulo se describe brevemente la historia de la Ciudad de Bella Vista Corrientes, nombrando a uno de los eventos que caracterizan a está región del país: La Fiesta Nacional de la Naranja enraizada en la cultura bellavistense.

A partir del análisis de la organización de la fiesta se plantean diversas situaciones cuyo eje vertebrar es la proporcionalidad, que constituye un núcleo a partir del cual se unifica líneas básicas de nociones como: razón y proporción, fracción y números racional, cambios de unidades, cambios de escalas, repartos proporcionales, uso de regla de tres, porcentajes, teorema de Thales, semejanza de figuras, escala, números irracionales.

La proporcionalidad es uno de los conceptos básicos de la Matemática. Su estudio se Inicia con el trabajo de relaciones multiplicativas y continúan con las leyes que relacionan determinadas magnitudes variables; su estudio debe comprender: un amplio espectro de situaciones en las que aparezcan dos magnitudes relacionadas que permitan descubrir si dicha relación es o no directamente proporcional, la resolución de problemas de proporcionalidad usando la razón o haciendo uso de las propiedades de las proporciones, el trabajo con tablas y gráficos, y la introducción del lenguaje algebraico para completar las formas de expresar una función lineal.

La proporcionalidad no es importante solo desde el punto de vista de las ciencias, sino que también tiene una importancia fundamental desde el punto de vista del desarrollo de la inteligencia.

La enseñanza de la proporcionalidad tropieza generalmente con el inconveniente de dar prioridad a aspectos formales cuando no se aprovechan los conocimientos de los alumnos y el gran número de ejemplos que brinda el entorno cotidiano. La idea es partir de ejemplos de la vida cotidiana y proponer situaciones progresivamente más complejas y variadas, incorporando elementos de geometría.

En las actividades propuestas al alumno, se parte de la elección de papeles cuya forma geométrica es rectangular de manera de establecer interrelaciones entre el razonamiento proporcional numérico con la identificación de figuras semejantes, es conveniente establecer criterios a la hora de trabajar con la primera actividad, llamar "largo" al lado de mayor longitud y "ancho" al lado de menor longitud, de tal manera que a la hora de confrontar las producciones de los alumnos, las discusiones se centren en la familia de rectángulos que cumplen una cierta característica que tiene que ver con la semejanza.¿cuáles son las condiciones que permiten establecer la semejanza entre dos o más rectángulos?.¿A qué valor irracional se aproxima las razones establecidas en estos rectángulos?.

> *Uno de los esfuerzos constantes del hombre ha sido encontrar representaciones sencillas a escala que reprodujeran las formas y mantuvieran una cierta proporción en cuanto a las medidas. Es decir, el hombre ha vivido pendiente, en muchos momentos, de las reproducciones a escala que le permitieran divulgar ciertos conocimientos, o estudiar mejor ciertos fenómenos.*
>
> *La proporcionalidad se ha aplicado constantemente al estudio de la medida de satélites y planetas. Desde la época de los griegos se calculo algunas cuestiones, como distancia de la Tierra a la Luna, diámetro de la Tierra y diá-*

metro lunar. Actualmente conocemos con precisión las distancias entre los distintos planetas y satélites que componen el sistema solar y cuya representación gráfica aparece en diversos libros que traten del tema, tanto a nivel científico como a nivel escolar o de divulgación.[5]

El concepto de razón y proporción, será de ayuda en el desarrollo del razonamiento proporcional. Una utilidad práctica de este tipo de razonamiento se refiere al cálculo de valores desconocidos de alguno de los cuatro términos que intervienen en una proporción. El conocimiento de una razón se puede usar para hallar el valor de otra. Las comparaciones de precios, el uso de escalas en los mapas, la solución de problemas de porcentajes son algunos ejemplos de situaciones prácticas en las que se precisa resolver proporciones.

Diversas investigaciones han puesto de manifiesto que los estudiantes basan su razonamiento sobre las razones y proporciones en técnicas aditivas y de recuento en lugar de razonar en términos multiplicativos, lo que indica una deficiencia importante.

Si la razón entre lados correspondientes a rectángulos semejantes es K ¿Qué se puede decir de su perímetro?¿y de su área?. Son preguntas que se pueden ampliar a la hora por ejemplo de Ampliar de un formato A4 a A3 ¿qué cambia?¿Porqué?¿Qué ocurre con el tamaño de las letras?.

Si la superficie del papel ha pasado a ser un 50% mayor, es posible inferir que el tamaño de los cuadros y letras a aumentado un 50%?. Según Claudia Alsina " Esta información es importante para la cultura de la fotocomposición pero también lo es darse cuenta de que reducir un Formato A3 a A4 , por ejemplo, tiene idéntico coste material (papel, electricidad, imprentas,…) que hacer una vulgar fotocopia, pues solo la óptica de la máquina actúa de forma diferente: en Consecuencia nunca pague precios especiales por algo que no implica cambio de gastos. ¿Pero está relación es conocida por aquellos encargados de realizar las fotocopias?.

La notación de porcentajes y el razonamiento de proporcionalidad que se pone en juego cuando uno de los términos que intervienen en las proporciones toma el valor 100 se utiliza en una amplia variedad de situaciones de la vida diaria. La expresión "x%" es una manera alternativa de expresar la fracción x/100, pero el concepto de porcentaje proviene de la necesidad de comparar dos números entre sí, no sólo de manera absoluta (cual de los dos es mayor), sino de una manera relativa, es decir, se desea saber qué fracción o *proporción* de uno representa respecto del otro. En estas situaciones se suele utilizar el número 100, que es bien familiar, como referencia. Al situarlo como denominador de una fracción, su numerador nos indica qué porción de 100 representa.

La comprensión de los porcentajes se considera con frecuencia como fácil de lograr pero hay datos experimentales abundantes de lo contrario. El uso incorrecto de los porcentajes es frecuente no sólo entre los estudiantes de secundaria sino incluso también en los adultos. Se encuentran errores flagrantes, lo que sugiere que con frecuencia las ideas básicas pueden no estar claras. Por ejemplo, en

[5] Grupo Beta (1990)" Proporcionalidad Geométrica y semejanza " Editorial Síntesis. Pág. 123

algunas investigaciones se ha encontrado que alrededor de la tercera parte de los estudiantes de 17 años respondieron erróneamente a la siguiente cuestión : *"Si el 5% de los alumnos han faltado hoy a clase, ¿5 de cuántos han faltado?"* Un error en esta idea fundamental sobre los porcentajes sugiere que no sabían que 100 es la base de comparación de los porcentajes.

En otra investigación, alrededor de la mitad de los alumnos de 6º curso de primaria respondieron erróneamente la pregunta: *"¿Cuál es el 100% de 48?"* Es fácil encontrar en los medios de comunicación anuncios que revelan errores, confusiones y distorsiones sobre el uso de los porcentajes. Indicamos dos ejemplos:

- *"Precios rebajados el 100%".* Si este anuncio fuera correcto, los artículos serían gratis. Probablemente, los precios se redujeron el 50%. Si un producto que costaba originalmente $400 se vendía a $ 200 el anuncio calculó el 100% sobre el precio de venta, cuando debería haberlo hecho sobre el precio original.
- "De todos los doctores consultados, el 75% recomendó nuestro producto".Este tipo de afirmación podría ser un anuncio de alguna compañía. Si el anuncio dijera que "3 de cada 4 doctores que hemos entrevistado recomienda nuestro producto", la reacción del consumidor podría ser diferente. Los porcentajes se pueden usar con frecuencia para disfrazar los números implicados. Los porcentajes permiten hacer comparaciones de manera fácil debido al uso común de la base 100, pero pueden llevar a suponer que se ha usado una muestra mayor de la que efectivamente se ha usado.

Se introduce así uno de los "rectángulos notables"*: "2*; de uso común con esta proporción es el formato DIN A4 o cualquier otro rectángulo de la serie DIN. Es el único rectángulo con la propiedad de que al dividir su lado mayor en dos partes iguales se obtienen dos rectángulos dos rectángulos de la misma proporción. Está observación es la que sugirió al Dr. Portstaman la normalización de los formatos DIN.

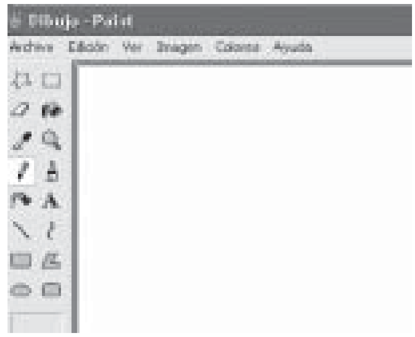
Además este rectángulo es de uso común en Arquitectura para el diseño de plantas y alzadas, citamos por ejemplo a Le Corbusier, quien en muchas de sus obras, utiliza este rectángulo como extensión natural de un cuadrado a partir de su diagonal utilizando el compás.

Las fotos, es la manera que en ellas podemos reconocer personas, objetos y lugares pues guardan semejanza con los reales. Hay fotos que agrandan miles o millones de veces objetos o seres del mundo real gracias al uso de microscopios, mientras que en otras se ve reducida en varias decenas de veces la realidad representada.

Existen microscopios ópticos que aumentan hasta 1.200 veces los tamaños reales, mientras que los microscopios electrónicos llegan a aumentar 1.000.000 veces los mismos. Los telescopios también aumentan cerca de 500 veces nuestras posibilidades de captar objetos lejanos.

Las fotocopiadoras, el zoom de la televisión, de las cámaras de fotos o de las computadoras son instrumentos de uso de la escala ya que permiten agrandar o reducir el tamaño de las imágenes manteniendo su forma; como también los recursos como el Paint.

La aplicación Paint, permite ampliar y reducir una figura cualquiera transformando su tamaño, las instrucciones de uso son las siguientes, dentro de los programas aparece como un accesorio, haciendo click sobre el mismo aparece la siguiente pantalla:



En la barra de menú, hacer clic en Imagen, elegir la opción expandir y contraer, aparecerá el siguiente cuadro de dialogo que permite modificar el tamaño de un objeto vertical o horizontalmente.

Expandir horizontalmente o verticalmente producirá una replica semejante del dibujo si el % que se coloca en ambas opciones es el mismo. Mientras que Contraer permite ingresar los grados que modifica la posición de los objetos. (Se podría pedir que modifiquen un dibujo según las herramientas mencionadas)

La relación de proporcionalidad entre magnitudes es un contenido de gran importancia en el aprendizaje de conceptos básicos de otras disciplinas – tales como la Economía, la Física y la Química - así como también en otras áreas de la Matemática misma (Estadística, Investigación Operativa, etc.) "*Uno de los instrumentos matemáticos más importantes, si no el primordial, para el tratamiento de la regularidad de sucesos que fundamentan el trabajo de investigación de la ciencia, el trabajo técnico y el funcionamiento de gran número de aparatos de medida, es la relación de proporcionalidad entre las magnitudes intervinientes. El sustrato de expresiones tales como razón, proporción, constante de proporcionalidad, etc. que se unifican sintéticamente por medio de la función lineal o función de proporcionalidad, lo constituyen las operaciones división y producto, dependiendo de las características que fijan la naturaleza de lo que se trata el que se utilice una u otra.*" (Salinas Ruiz, 1999)

En las actividades matemáticas del capítulo, se propone a los alumnos, las siguientes prácticas específicas:

- Actividad 1- Analizar proporciones:

  Identificación de semejanza de rectángulos a través de la comparación de formatos de papel, para obtener la proporción que sirve de base a los formatos serie A. (a/b=”2). Porcentaje.

- Actividad 2- Optimizar medidas:

  Diseño de vasos, cajas teniendo en cuenta los formatos trabajados en la actividad 1, complementando con cálculos de máximos y mínimos de áreas y volúmenes.

- Actividad 3- Formas de trabajar en matemática:

  Explicitación y análisis de las expresiones simbólicas, explicaciones y argumentaciones utilizadas en las actividades desarrollados. Ampliando con actividades intramátematicos relacionados a la semejanza.

- Actividad 4- Mirada sobre el mundo de la matemática:

  Análisis de materiales bibliográficos que permite analizar en parte como evolucionan los conocimientos en matemática a través de la historia

Según Carl B. Boyer[4]:

“Las afirmaciones que se hagan de los orígenes de esta materia son más antiguos que el arte de la escritura. Sólo durante la última media docena de milenios, de un largo proceso que puede haber cubierto miles de milenios, ha sido capaz el hombre de poner por escrito sus pensamientos y aquello que quería dejar registrado. Así pues, en lo que se refiere a los datos correspondientes a la época prehistórica, nos vemos obligados a depender de interpretaciones que se basan en los pocos utensilios que se han conservado, de la evidencia que puede suministrar la antropología actual y de la extrapolación conjetural hacia atrás hecha a partir de los documentos que se han conservado. Herodoto y Aristóteles no querían arriesgarse a situar los orígenes de la geometría en una época anterior a la de la civilización egipcia, pero está claro que la geometría en la que ellos pensaban tenía sus raíces en una antigüedad mucho mayor. Herodoto sostenía que la geometría se había originado en Egipto, porque creía que dicha materia había surgido allí a partir de la necesidad práctica de volver a trazar las lindes de las tierras después de la inundación anual del valle del río Nilo. Aristóteles sostenía en cambio que el cultivo y desarrollo de la geometría en Egipto se había visto impulsado por la existencia allí de una amplia clase sacerdotal ociosa. Nosotros podemos considerar que los puntos de vista de Herodoto y de Aristóteles representan dos teorías opuestas acerca de los orígenes de la matemática, la primera defendiendo un origen basado en una necesidad práctica, y la segunda un origen basado en el ocio y el ritual sacerdotal. El hecho de que a los geómetras egipcios se les llamase a veces

[4] BOYER; Carl B. Título Original de la obra “A History of Mathematics”(1969 by John Wiley & Sons, Inc)”Historia de la Matemática” Versión española de Martinez érez, Mariano (Madrid, Alianza Editorial S.A. 1986)-Pág. 24 a 26

"los tensadores de la cuerda" (o agrimensores) se puede utilizar para apoyar cualquiera de las dos teorías, porque las cuerdas se usaron indudablemente tanto para bosquejar los planos de los templos como para reconstruir las fronteras borradas entre los terrenos. No podemos rechazar con seguridad ni la teoría de Herodoto ni la de Aristóteles sobre los motivos que condujeron a la matemática, pero lo que sí está bien claro es que los dos subestimaron la edad de dicha ciencia. El hombre neolítico puede haber disfrutado de escaso tiempo (le ocio y haber tenido pocas necesidades de utilizar la agrimensura, y sin embargo sus dibujos y diseños revelan un interés en las relaciones espaciales que prepararon el camino a la geometría. La alfarería, la cestería y los tejidos muestran en sus dibujos ejemplos de congruencias y simetrías que son en esencia partes de la geometría elemental."

Los Elementos es, después de la Biblia, el libro que mayor presencia ha tenido en la Historia. Su contenido, interpretado en contextos que consideraban las Matemáticas como el producto acabado de la razón, se consideró determinante del espacio físico de manera absoluta. La obra de Newton contribuyó decisivamente a ello. ¿Cómo se pudo dudar de que lo expresado en los Elementos reflejara de manera única y acabada el espacio? ¿Cómo fue posible pensar que la Geometría recogida en la obra de Euclides no fuera la única Geometría que podía construir la racionalidad matemática?

No es éste el lugar de hacer una historia del problema, sino de poner de manifiesto cómo la perspectiva epistemológica de los diversos autores fue clave, tanto para permanecer en la posición heredada, como para dar a luz las nuevas Geometrías

2.1.b. Sobre el Capítulo 2: Construir con distintas proporciones

En este capítulo se hace referencia a manifestaciones artísticas, introduciendo la necesidad de efectuar un análisis matemático, en particular geométrico, para tratar de dar respuestas a un problema estético: ¿Por qué me gusta más o es más bonito un edificio que otro?¿Que hace que un cuerpo sea más bello que otro?. Estableciendo así la necesidad de un modelo matemático que ayude y permita dar una explicación racional de nuestro entorno.

Desde antiguo, las disciplinas de Arte y Geometría han estado profundamente relacionadas, contribuyendo cada una de ellas al desarrollo de la otra. Por otra parte la Naturaleza se prodiga en ejemplos de seres vivos e inertes cuyas formas han sido representadas por modelos matemáticos creados por el hombre a lo largo de la historia del conocimiento.

"*La teoría de la Proporción*[5] *forma hoy un cuerpo doctrinal importante, de carácter interdisciplinario, con gran relevancia en los estudios de Arte y Arquitectura, siendo uno de los elementos clave para conseguir la armonía entre las partes y el todo de una obra artística o arquitectónica.*

La proporción se llama racional, conmensurable o estática si a/b es un número racional positivo.

[5] REYES IGLESIAS, Ma. Encarnación " Arte y Naturaleza en clave geométrica". Universidad de Valladolid.

Se denomina irracional, inconmensurable o dinámica a la proporción de valor irracional positivo.

Proporciones Notables			
Estáticas		**Dinámicas**	
Cuadrada	$\frac{a}{b} = 1$	Raíz de dos	$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$
Dupla	$\frac{a}{b} = 2$	Raíz de tres	$\frac{a}{b} = \sqrt{3}$
Sesquitercia	$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$	Plata	$\frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2}$
Sesquiáltera	$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$	Áurea	$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Pentatercia	$\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$	Cordobesa	$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

En la siguiente tabla se resumen algunas características de los números de oro, plata y plástico, los dos primeros relacionados con proporciones en el plano y el último con proporciones en el espacio de tres dimensiones.

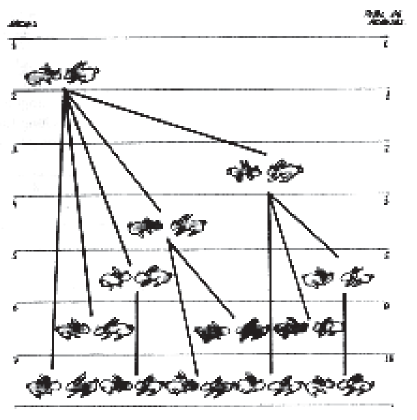
Sucesión de Fibonacci	Sucesión de Pell	Sucesión de Padovan
$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$	$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$	$a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n-2}$
con $a_0 = a_1 = 1$	con $a_0 = a_1 = 1$	con $a_0 = a_1 = a_2 = 1$
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...	1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239,...	1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16,...
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = P$
ϕ es el número de oro	θ es el número de plata	P es el número Plástico
1,618...	2,4142...	1,324...
Raiz real y positiva de: $x^2 - x - 1 = 0$	Raiz real y positiva de: $x^2 - 2x - 1 = 0$	Raiz real y positiva de: $x^3 - x - 1 = 0$

En el primer capitulo se ha trabajado con la proporción dinámica “2; en este capitulo se sigue trabajando con las dinámicas mencionando al numero de oro ó áureo; desde la utilización del número áureo por la civilizaciones antiguas: griegos, egipcios, romanos, etc., hasta nuestros días, la principal característica de este número ha sido y es la belleza que su utilización produce en las formas geométricas, artísticas y antropomórficas.

En segundo lugar, se introducen otras proporciones dinámicas y su relación: el número de plástico, y la proporción cordobesa. ¿Se puede establecer alguna relación entre la proporción “2 del capítulo 1; y el número de plata?

Dentro de los sistemas de proporciones aparece luego “el Modulor “ de Le Corbousier que está basado en las dimensiones de la figura humana, sistema pensado para mantener la escala humana en todas partes. Dicha proporción tiene una estrecha relación con el número de Oro.

La sucesión de Fibonacci, es la sucesión numérica que aparece, por ejemplo, en un sencillo problema “ Un par de conejos adultos, macho y hembra, empiezan a procrear a los dos meses de su nacimiento engendrando un único par macho y hembra, a partir de ese momento, cada uno de los meses siguientes un par más. Admitiendo que no muriese ninguno de los conejos, ¿cuántos habría al cabo de un año?



La siguiente figura muestra el problema partiendo de una pareja recién nacida de conejos. Observa que al final del primer mes hay una pareja (la inicial), al final del segundo, una pareja (la misma, puesto que aún no ha), al cabo del tercer mes, dos parejas, etc. Aparece la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...caracterizada porque cada término, a partir del tercero, es igual a la suma de los dos anteriores:

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

El trabajo con esta sucesión tiene como objetivo, que el alumno vea las diferentes situaciones naturales en las que aparece esta sucesión, algunas curiosas propiedades que posee y su estrecha relación con el número áureo.

Las actividades matemáticas de este capítulo, permiten a los alumnos desarrollar las prácticas siguientes:

- Actividad 1-Analizar dimensiones:

  Verificación y comprobación de la existencia de la razón Áurea, en diversos edificios arquitectónicos. Análisis de otras proporciones.

- Actividad 2-Organizar relaciones:

  Relación entre el número de Oro y, la sucesión de Fibonacci, y la modulación de Le Corbousier. Análisis de las características de algunos muebles siguiendo la proporción de Le Cobusier.

- Actividad 3- Formas de trabajar en matemática:

  Explicitación y análisis de las expresiones simbólicas, explicaciones y argumentaciones utilizadas en las actividades desarrollados. Ampliando con actividades intramátematicos relacionados a los distintos conjuntos numericos.

- Actividad 4- Mirada sobre el mundo de la matemática:

  Análisis de materiales bibliográficos que permite extrae relaciones numéricas de algunas de las proporciones trabajadas.

2.1.c. Sobre el Capítulo 3: Dibujar guardando proporciones

Este capítulo constituye, por un lado, una síntesis yq fue diseñado en función de reunir los conceptos trabajados en los capítulos anteriores de este módulo.

Por otro lado las diferentes y diversas situaciones en las que aparecen las espirales en la naturaleza y en el arte nos han llevado a incluir estas curvas en esta propuesta. Intentamos con las actividades, poner en contacto al alumno con los principales tipos de espirales que existen, así como con los métodos más sencillos para construirlas. Una de las características especiales de algunas espirales es que la razón entre cada segmento y el siguiente es la proporción áurea (a/b=Ö). De hecho en la naturaleza están presentes la mayoría de las espirales, como ser la espiral de un caracol.

Las curvas representan trayectorias correspondientes en algunos casos a movimientos o fenómenos físicos. Se propone comenzar por las espirales; luego centrarse en el trabajo con la elipse, partiendo de por ejemplo de aproximaciones mediante curvas formadas por arcos de circunferencias, en la elaboración de diseños. Para finalmente caracterizar a las cónicas según las propiedades que cumplen.

La lectura del último texto, relacionan con las proporciones establecidas en el cuerpo humano por Leonardo Da Vencí.

Las actividades matemáticas permiten a los alumnos desarrollar las prácticas siguientes:

- Actividad 1- Generar espirales:

  Trazado de espirales siguiendo intrusiones; elaboración de instrucciones dado el dibujo de una espiral.

- Actividad 2-Generar otras curvas:

  Reproducción de un dibujo a partir del análisis de las conicas que la forman, análisis de sus características.

- Actividad 3- Formas de trabajar en matemática:

  Explicitación y análisis de las construcciones y descripciones utilizadas en las actividades desarrollados. Ampliando con otras actividades sobre las cónicas análisis de la ecuación y variabilidad del grafico en función de los valores que toman las variables

- Actividad 4- Mirada sobre el mundo de la matemática:

  Análisis de materiales bibliográficos que permite extrae relaciones numéricas de algunas de las proporciones trabajadas en los capítulos anteriores, y diseñar algunas figuras.

2.1.d. Para hacer un balance del trabajo realizado en los tres capítulos

- Actividad -Disponibilidad de herramientas de trabajo matemático:

  Toma de conciencia por parte de los alumnos acerca de sus fortalezas y debilidades en la disponibilidad de las herramientas matemáticas que han tenido que utilizar para desarrollar las actividades del cuaderno.

Argumentar ...

¿a dónde nos conduce?

4. Argumentar... ¿a dónde nos conduce?

En este eje se tratará que los alumnos a través de distintos textos y actividades propuestos puedan realizar un recorrido, que les permita mirar a la matemática como ciencia, sus fundamentos, los métodos para demostrar la verdad, los procesos históricos y actuales con lo que se construye el conocimiento matemático, cambiando un poco la óptica de verla solo como un conjunto de técnicas.

Nos proponemos aportar a la práctica de validación en matemática de los lectores que es esencial para trabajar en forma autónoma, discutiendo los criterios que en ella funcionan y mostrando su importancia en el trabajo de los matemáticos.

Para ello tomaremos en el primer capítulo la cuestión de cómo analizar razonamientos que llevan a contradicciones o a sorpresas, las paradojas. En el segundo capítulo avanzaremos en la reflexión sobre los procesos de razonamiento utilizados al resolver algunos problemas y cómo asegurar la validez de las conclusiones. En el último, consideraremos diferentes alternativas que se usan en matemática para demostrar y veremos a través de ejemplos, el largo y complejo camino que va desde la elaboración de conjeturas hasta la obtención de demostraciones.

En estos capítulos se discute, como concebir la matemática y su importancia en nuestra cultura. Trataremos de mostrar en que consiste la actividad matemática; el pensamiento matemático, dado que constituyen en la actualidad un componente de cada uno de los aspectos de la cultura.

En el pensamiento de muchos matemáticos de todos los tiempos, la matemática es una forma de creación de belleza intelectual. Platón en la antigüedad, en el renacimiento Kepler, y entre los mas recientes, Poincaré, Hermann Weyl, son defensores de las conexiones entre matemática y belleza. Pero ¿como interactúa la matemática con toda la producción del hombre, de la cultura, de la filosofía, del arte?. Es indudable lo que plantea Miguel de Guzmán, cuando afirma:

> *“La actividad matemática es así una peculiar fusión de reconocimiento del orden presente en el Universo y, al mismo tiempo de creatividad, espontaneidad, libertad, belleza. En esto precisamente estriba su valor educativo mas profundo, mucho mas que en el mero dominio de las destrezas técnicas del oficio.”*

2.2.a. Sobre el Capitulo 1: Las paradojas

En este capitulo se realiza un trabajo con paradojas. El mismo, nos permitirá mostrar la riqueza interpretativa de significados y formas de representación de los conceptos matemáticos ligados a ella. Creemos que mediante la realización de actividades formativas basados en la búsqueda de significado y de resolución de paradojas podemos poner a los estudiantes en planteos que tiendan a realizar lo que nosotros describimos en la introducción que es “hacer matemáticas”.

Vamos a proponer paradojas del libro de Martin Gardner (1983), Paradojas Ajá!. El menciona la polisemia del término y explica que en cualquiera de las siguientes situaciones podemos decir que hay paradojas: 1) Afirmaciones que parecen falsas, aunque en realidad son verdaderas. 2) Afirmaciones que parecen verdaderas, pero que en realidad son falsas.3) Cadenas de razonamiento aparentemente impecables, que conducen sin embargo a contradicciones lógicas (falacias).4) Declaraciones cuya verdad o falsedad es indecidible.

El trabajo con paradojas lleva a un razonamiento "*contrario al sentir común que provoca un sentimiento de sorpresa"* (Gardner). Nuestra idea es que no sea sólo una sorpresa, sino que incluyan una componente de reflexión ligado al significado de los conceptos matemáticos utilizados, pidiéndoles buscar una explicación conceptual, que no se reduzca simplemente a analizar la forma de expresión de los conceptos. Nuestra intención es presentar conceptos matemáticos, razonamientos, que en una primera aproximación aparezcan como paradójicos es decir contradecir la intuición de quien las lee. De esta forma el alumno, que muy probablemente ha trabajado sólo con situaciones donde el razonamiento matemático resulta no contradictoria, se plantee esta cuestión y realice argumentaciones tendientes a buscar la interpretación más amplia de la afirmación y/o razonamiento paradójico, basado en el sentido de los conceptos matemáticos ligados a esa *paradoja*.

Las paradojas seleccionadas presentan en un primer momento sorpresa, pero tiene soluciones no siempre triviales, y están relacionadas con conocimientos que pueden darse en distintas representación y campos de la matemática, geometría, teoría de números, probabilidad, entre otros.

Para ilustrar nuestro propósito, recuperamos las ideas que plantea Guy Brousseau en un articulo titulado: "Introducción al estudio de la enseñanza del razonamiento y de la prueba: las paradojas ", publicado en la página "La lettre de la Preuve", donde expresa:

> *"La enseñanza del razonamiento, y particularmente el razonamiento lógico y matemático, plantea tanto al didacta, como al docente, algunos problemas paradójicos bien conocidos: las dificultades resultan esencialmente de tres órdenes de consideraciones, una de origen metamatemática, una de orden psicológica y sociológica y otra de orden didáctica.*
>
> *La presentación "ortodoxa" de los textos de matemáticas lleva a pensar que la lógica formal (el modus ponens con, tal vez, algunos otros medios lógicos) es la herramienta fundamental y necesaria de las matemáticas, y que su objetivo es de mostrar la falta de contradicción de su autor (consigo mismo y con las matemáticas conocidas). Muchos profesores de matemáticas tienen tendencia en deducir de ello que, puesto que los razonamientos matemáticos son los únicos medios de establecer públicamente la verdad de un enunciado matemático, estos razonamientos han de describir necesariamente, a su vez (o utilizarse como modelo para describir), el pensamiento que construye correctamente éstas, y por lo tanto que describan el pensamiento de las matemáticas y de los alumnos. Comporta que quieren enseñar a pensar, y después a razonar directamente como se demuestra, además de confundir la actividad y el razonamiento matemático de los alumnos con su producto cultural: el medio estándar de su comunicación. Si por otra parte se admite que el funcionamiento natural*

del pensamiento produce conocimientos exactos por los procesos (retóricos, heurísticos, psicológicos …) que no se reducen a aquellos que resultan de la investigación matemática paciente de las presentaciones y de las notaciones más cómodas (por los matemáticos y sus investigaciones), ¿cuáles son estos procesos, y cómo realizarlos? o, ¿cómo hacer que se realicen?

Esta paradoja se acerca a la que encuentran los principiantes en lógica: quisieran construir formalmente la lógica formal, es decir poseer de ella una autogénesis, en la cual se podrían levantar luego todas las ciencias. Tienen que desilusionarse pronto y aprender de entrada a distinguir la lógica del constructor de la lógica que construye para entrar convenientemente en el estudio de la lógica matemática. “

En este capítulo se plantea en primer lugar una paradoja lingüística de la época de los griegos atribuida a Epiménides y a través de su análisis poder actualizarlo a cuestiones cotidianas desde pintada en la pares, a frases de economistas y aforismos. En segundo lugar se incorpora el tema de la regresión al infinito con propuestas de la producción literaria de Lewis Carroll, para luego incluir paradojas semánticas y el aporte de la obra de Alfred Tarski, un distinguido matemático y lógico polaco; con su concepto de metalenguaje pasando al formalismo matemático con los trabajos de Frege; Russell. El análisis de paradojas matemáticas con números permite el trabajo de la idea de infinito, conjuntos coordinables entre otras, con extensiones en la obra de Borges o del arte como los dibujos de Escher.

Sintetizamos algunos conceptos de “La definición de verdad” de Alfred Tarski, del trabajo de Carlos Muñoz García, recuperable en forma completa en el sitio *http://www.ucm.es/info/pslogica/verdadtarski.pdf:*

Una paradoja es una oración cuya verdad es indecidible. Incumple una de las leyes básicas de la lógica, el principio de no contradicción. Parece evidente, y seguramente todos estaríamos de acuerdo, que nada puede ser verdadero y falso al mismo tiempo. No puede ser que algo sea y no sea a la vez. Sin embargo, la afirmación de Epiménides o versiones de su paradoja, como por ejemplo, “Esta oración es falsa”, si es verdadera es falsa y si es falsa es verdadera. ¿Cómo es esto posible?

La verdad es una relación entre un mundo y un lenguaje que habla de él.

- *Si las oraciones del lenguaje expresan los hechos del mundo decimos que esas oraciones son verdaderas.*

- *Pero, el mundo o ciertos hechos del mundo son el resultado del proceso de conceptuarlos mediante los recursos del lenguaje.*

- *Además, ahora nos encontramos con que el lenguaje puede hablar de sí mismo, simbolizarse a sí mismo y referirse, en consecuencia, a sí mismo. En estos casos, cuando nos preguntamos por la verdad o la falsedad de enunciado que hablan de sí mismo, nos encontramos con paradojas semánticas difíciles de resolver. Para evitar estas paradojas veíamos que en los lenguajes formales hay que ser estrictos y aducir a otro lenguaje, un metalenguaje, para hablar del lenguaje, el lenguaje-objeto.*

La semántica formal o teoría de modelos surge en los años cincuenta de la mano de un lógico de origen polaco llamado Alfred Tarski.

Los cálculos lógicos o matemáticos son estructuras sintácticas que no hablan de hada hasta que no se les aporta una semántica, una interpretación. El proceso es el inverso al juicio normal que hacemos para determinar si algo es verdadero o falso. Cuando hago una afirmación sobre el mundo, el mundo ya existe, los recursos lingüísticos que empleo para hablar de él refieren ya a los elementos del mundo y, en consecuencia, es al mundo donde debo acudir para verificar mis afirmaciones sobre él. Sin embargo, los lenguajes formales no hablan de nada y las teorías formales no describen ninguna realidad. La semántica formal lo que hace es crear mundos, igualmente formales, que hagan verdadera a la teoría resultante de un cálculo. A estos mundos formales se denominan modelos.

Condiciones para definir "ser verdadero de un lenguaje"

Tarski, retomando las ideas realistas de Aristóteles, investigó la noción de verdad para ofrecer una posible definición de este valor relativo a un lenguaje que escapará a toda paradoja, como por ejemplo, la de Epiménides. Determinó que para que una teoría de la verdad pudiera determinarse para un lenguaje que fuera consistente y no contuviera paradojas debería cumplir dos condiciones, sin las cuales la definición no sería posible. Una vez planteadas estas condiciones, procede a definir el concepto de verdad.

Dos son las condiciones que impone Tarski a una teoría sobre la verdad:

1. Adecuación Material

El requisito fundamental que cualquier teoría sobre la verdad debe satisfacer es que de ella se puedan seguir enunciados de lo que él denomina Convención (T):

(T) O es verdadera si y sólo si p

(i) donde O se ha de sustituir por el nombre de una oración del lenguaje para el que se define el predicado "es verdadero". Obsérvese que O deber ser un nombre para la oración del lenguaje, es decir un elemento de otro lenguaje o de un metalenguaje.

(ii) Donde p se ha de sustituir por una oración del lenguaje en el que se está definiendo el predicado "es verdadero". Esta oración ha de representar las condiciones de verdad de la oración que ocupe el lugar de O.

Pongamos un ejemplo: "La nieve es blanca" es verdadera si y sólo si la nieve es blanca.

Esta oración cumpliría la convención (T). Esto naturalmente no es la definición, solamente es una condición que ha de cumplir la definición de verdad para un lenguaje. La definición ha de rellenar ese esquema con las oraciones de ese lenguaje y sus condiciones de verdad respectivas.

2. Corrección formal

Este requisito formal concierne a la estructura del lenguaje sobre el que se da la definición de verdad y a los predicados y conceptos que se utilizan en la teoría. Las condiciones formales deben ser la siguiente:

(1) La definición de verdad tendrá que ser relativa a un lenguaje, pues una y la misma oración puede ser verdadera en un lenguaje y falsa en otro.

(2) Cualquier teoría sobre la verdad para una lenguaje L, se formulará en una metalenguaje de L, M_L, donde M_L ha de contener:

(a) Nombre para cada uno de los elementos de L.

(b) Oraciones de M_l que sea una traducción adecuada de las L.

(3) El lenguaje para el que se define el predicado "es verdadero" y el metalenguaje con el que se define tienen que se especificables o determinables. Esto es, ha de existir un método que permita determinar si algo es una oración del lenguaje o si no lo es.

Tarski piensa que estas condiciones no las cumple ningún lenguaje natural, pues en ellos no se distingue el lenguaje del metalenguaje y además no son determinables. A pesar de esta idea, Davidson, un filósofo norteamericano, intentó aplicar la definición de verdad de Tarski a los lenguajes naturales para crear una teoría del significado.

(El artículo original de Tarski puede consultarse en:
http://serbal.pntic.mec.es/~cmunoz11/tarski.pdf)

Las actividades matemáticas de este capítulo permiten a los alumnos desarrollar las prácticas siguientes:

- Actividad 1: Algunas paradojas lingüísticas: La paradoja del mentiroso. Regresion dual, infinita y circular. Analizar paradojas dentro de la literatura, en las obras de Lewis Caroll.
- Actividad 2: De las paradojas a los metalenguajes. Paradojas semánticas. El metalenguaje y la postura de Alfred Tarski sobre la verdad.
- Actividad 3: De cómo las paradojas intervienen en la formulación de nuevos problemas matemáticos Formalismo matemático. El programa lógico. El trabajo de Frege y el programa lógico. Paradoja de Rusell.
- Actividad 4: Algunas paradojas matemáticas Paradojas con números. Correspondencia biunívoca entre un conjunto infinito y un subconjunto del mismo.
- Actividad 5: Una mirada sobre el mundo de la matemática. El infinito matemático. Los números transfinitos. El número Aleph. Los irracionales.
- Actividad 6: Formas de trabajar en matemática Análisis de validez del razonamiento en un problema de repartos: paso al límite y la relación aritmética ligada a las fracciones. Los copos de nieve y los dibujos de Escher.

2.2.b. Sobre el Capítulo 2: Conjeturas y teoremas

Una de las principales contribuciones de los griegos a la matemática se refiere a que para ellos todo resultado debía ser establecido deductivamente a partir de un sistema de axiomas. Esta concepción de la manera en que se debían obtener las afirmaciones de la matemática permitía que mediante razonamientos válidos se obtuvieran proposiciones verdaderas al partir de nociones comunes y postulados verdaderos. Las formas válidas de los razonamientos garantizaban de esta manera la veracidad de las afirmaciones de la matemática. La veracidad de los axiomas era garantizada por la evidencia de los mismos. Posteriormente estas concepciones cambiaron, pero debieron transcurrir varios siglos para que ese cambio se llevara a cabo.

La matemática se transformó en la ciencia hipotético-deductiva por excelencia a partir del siglo III a.C., con la aparición de los Elementos de Euclides. Esta obra constituye una recopilación de gran parte de los conocimientos matemáticos existentes en los tiempos de Euclides. Su gran valor reside en la rigurosa organización deductiva. La demostración tomó a partir de ese momento el papel de explicación válida, a partir de ciertos primeros principios: los axiomas y los postulados. Aristóteles había descrito las características de una ciencia demostrativa, Euclides llevó a la práctica esas ideas en el cuerpo de la matemática. En su obra, acorde con las ideas aristotélicas sobre las características que debía tener una ciencia teórica en las que la lógica es previa, se identifican los elementos que componen una ciencia demostrativa:

- Definiciones: a través de axiomas, se definen los objetos ideales con los que se trabaja, independientemente de la experiencia pragmática.
- Primeros principios: postulan ciertas propiedades que se aceptan por su evidencia sin demostración como verdades. Hay de dos clases: los llamados postulados; los específicos de cada ciencia, y las nociones comunes o axiomas, los comunes a todas.

En este capítulo se tratará que los alumnos a través de distintas actividades puedan realizar un recorrido que le permita mirar los métodos para demostrar la verdad en matemática, cambiando un poco la óptica de verla solo como un conjunto de técnicas.

Se realizan distintos procesos de razonamientos, siendo el eje vertebrador la actividad matemática desarrollada por los pitagóricos, donde se presentan algunos cálculos numéricos y geométricos y el aún vigente Teorema de Pitágoras.

Se analizan distintas secuencias con cálculo numérico y geométrico, como son los números figurados. El cálculo numérico permite establecer ciertas reglas de formación de los números, llegando a establecer generalizaciones que permiten formular conjeturas. En el trabajo con sucesiones, y en especial éstas que se pueden obtener por recurrencia, se procura mostrar la limitación que presentan al momento de demostrar las conjeturas. Se pretende que las mismas puedan ser demostradas mediante el tratamiento algebraico ó utilizando el principio de Inducción Completa.

Con respecto al trabajo con Teorema de Pitágoras, se presentan dos etapas:

En la primera, el trabajo con ternas pitagóricas permite descubrir la relación de este Teorema con los números naturales, como así también que no todos los naturales cumplen esta relación. Por otra parte la construcción de un triángulo rectángulo permite mostrar que para construirlo, dos longitudes son suficientes, el tercer lado tiene una longitud determinada, está impuesto, de donde se puede conjeturar la existencia de una relación entre las longitudes de los tres lados.

En la segunda etapa, se pasa a la demostración del Teorema y de su recíproco, dada por Euclides en su obra “Elementos”, donde se muestra el modo de pensar griego cuando representan los números cuadrados por las áreas de los cuadrados. Se presentan también distintas maneras de demostrar este teorema utilizando distintas propiedades. Es importante incentivar a los alumnos en la realización de la demostración, aún más si se tiene en cuenta que su introducción está llena de dificultades para muchos alumnos. Por otra parte en matemática, la demostración ocupa un lugar central, pues es el método de prueba cuyo empleo sistemático caracteriza esta disciplina entre las otras ciencias.

Se han seleccionado textos anexos para ampliar estas cuestiones, en la Antología que será entregada con este material.

Para explicitar el sentido de la noción de demostración al que nos referimos en este capítulo, resulta ilustrativo retomar algunas ideas planteadas por Balacheff (se puede consultar en su página, *http://www.lettredelapreuve.it,* donde podemos encontrar números artículos sobre el tema de pruebas y demostraciones). Sin desconocer los aspectos lógicos, Balacheff destaca fundamantalmente el caráter social de la prueba, la necesidad de interacción social para su producción y debate, el rol de la contradicción para generar en el alumno la necesidad de elaborar una conjetura y finalmente desencadenar un proceso de prueba.

Sostiene el carácter social de la demostración, pues él la concibe como un tipo particular de explicación, diferenciando:

- Una *explicación* es un discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido para el locutor, de una proposición o de un resultado.
- Una *prueba* se compone de explicaciones aceptadas por una comunidad dada en un momento dado.
- Una *demostración* es una prueba que tiene una forma particular, dada por una serie de reglas determinadas de deducción.
- Un *razonamiento* es la actividad intelectual de manipulación de informaciones para obtener nuevas informaciones a partir de otras dadas.
- Una *resolución* es la actividad del sujeto entre el instante en que un problema le es planteado y el momento en que él asume que está resuelto.

En las actividades matemáticas, se propone a los alumnos las siguientes prácticas específicas:

· Actividad 1: Los pitagóricos, los números y las generalizaciones: Operar con los números figurados, determinar el patrón de formación de la sucesión y escribir la expresión algebraica del n-ésimo término. Cálculo de una progresión aritmética. Formas de expresión en Matemática: el símbolo de sumatoria.

· Actividad 2: Una relación muy conocida con ternas numéricas. Las Ternas Pitagóricas y el Teorema de Pitágoras: Elección de ternas de números que erifiquen la condición para la construcción de un triángulo rectángulo. Relacionar entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

· Actividad 3: La demostración del teorema de Pitágoras Analizar y justificar las propiedades aplicadas en la demostración del Teorema de Pitágoras y su recíproco. Demostrar una parte de estas. Dificultades en las demostraciones.

- Actividad 4: Formas de trabajar en matemática Aplicar del Teorema de Pitágoras en diferentes cuestiones. Los números triangulares y rectangulares: obtención de su formación. Verificar algunas propiedades de los números triangulares y rectangulares. Demostración de alguna de ellas.
- Actividad 5: Miradas sobre el mundo de la matemática

2.2.c. Sobre el Capitulo 3: el trabajo de los matemáticos y las demostraciones

La producción matemática del siglo XX ha superado a la producción en toda la historia anterior. Por citar algunos datos: en La década de Los 90 se han publicado una media de más de 50.000 trabajos anuales de investigación en Matemática en las revistas especializadas del todo el mundo.

Junto a la cantidad de producción, la segunda causa es, sin duda, la diversidad de campos que ella abarca: a lo largo del siglo XX han surgido y se han desarrollado áreas completamente nuevas, y los resultados matemáticos han impregnado prácticamente todas las parcelas de nuestra vida cotidiana. Como resultado, el desarrollo tecnológico y científico del siglo XX no ha tenido parangón en la historia de la humanidad. La matemática constantemente se plantea nuevas cuestiones, preguntas, problemas. Es así que exactamente cien años después de que el científico alemán David Hilbert definiera los 23 grandes problemas que la Matemática del siglo XIX había sido incapaz de resolver, el empresario norteamericano Landon Clay, el 20 de mayo de 2000 , ofrece 7 millones de dólares por resolver los siete enigmas matemáticos del siglo XXI. La lista recoge los problemas cruciales para el desarrollo futuro de las ciencias exactas. Ha ofrecido un millón de dólares a quienes solventen cada uno de los siete enigmas fundamentales que, según su equipo de asesores, han derrotado a la Matemática del siglo XX. De los 23 retos de Hilbert, 20 han sido resueltos o abordados satisfactoriamente, algunos de los teoremas famosos que se resolvieron en el siglo XX es el famoso Teorema de Fermat que se demostró en 1994, el de los cuatro colores, y dos ya no se consideran cruciales. El otro vuelve a aparecer en la nueva lista.

Los nuevos del siglo XXI son: 1. El problema P contra NP. 2. La hipótesis de Riemann. 3. La teoría de Yang-Milis. 4. Las ecuaciones de Navier-Stokes. 5. La conjeturo de Birch y Swinnerton-Dyer.6. La conjetura de Hodge. 7. La conjetura de Poincaré.

Los últimos veinticinco años se han visto coronados por una serie de éxitos de las matemáticas. Muchos problemas clásicos, algunos de ellos tras siglos de haber sido planteados, han encontrado finalmente su solución. El problema de los cuatro colores, el último teorema de Fermat, la conjetura de Kepler y ahora la conjetura de Poincaré son quizás los más sonados de esos problemas clásicos. En este capitulo trataremos de mostrar el camino seguido para demostrar el teorema de los cuatro colores y la conjetura de Poincaré

También incluimos el reportaje a un matemático, premio Fiels en ocasión de la celebración la XXV edición del Congreso Internacional de Matemáticos (ICM2006). En Agosto del 2006 en Madrid .Es en estos congresos en donde se entregan, desde 1936, las Medallas Fields a Matemáticos destacados que no sobrepasen la edad de 40 años y que hayan conseguido reconocidos logros en su especialidad. La Medalla Fields es el premio de mayor importancia que puede recibir un matemático vivo. Como ocurre con los Premios Nobel, representa para los alardonados el pasar a la Historia de la Ciencia.

Las conjeturas son el resultado de la observación y el razonamiento inductivo. Chazan y Houde (1989) señalan que *"Una conjetura en geometría es una proposición que puede ser cierta o falsa; al momento de considerarla, la persona que hace la conjetura no sabe si es cierta o falsa pero piensa que es cierta. Así, la conjetura no es una definición ni un postulado, pero al ser demostrada se convertirá en un teorema.*"

Respecto a desarrollar algunas ideas para el taller sobre la enseñanza de la demostración vamos a tomar como referencia le trabajo de Carmen Azcárate "Definiciones, demostraciones, ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?", nos parece importante en el sentido de pensar la cuestiones referidas a las funciones de la demostración en el aula. La autora plantea:

> *"A menudo la demostración existe para el alumno como un ritual, un discurso que debe repetir o cuyo estilo debe imitar si se le pide probar un enunciado, más que como una herramienta explicativa basada en un sistema común de validación construido y aceptado por él y su grupo (Balacheff, 1982). Algunas de las razones de este hecho podrían encontrarse en la propia actividad matemática dentro del aula y en el contrato didáctico que la rige:*
>
> *a) Se centra la función de la demostración exclusivamente en la verificación de resultados, sin siquiera acompañar esta práctica de la discusión de las razones por las que se repiten una y otra vez validaciones ya hechas por otros.*
>
> *b) Se trata la demostración como un objeto que el profesor acepta o rechaza cuando la recibe de su alumno, antes que resaltar su papel dentro de un proceso de justificación (Balacheff, 1982).*
>
> *c) No se recrean las condiciones que permiten apreciar la necesidad de la demostración frente al riesgo de equivocarse al aceptar un enunciado falso o rechazar uno verdadero y al riesgo de no lograr convencer a los demás al comunicar un resultado matemático.*
>
> *d) Se presentan demostraciones formales a los alumnos, sin haberlos acercado previamente al simbolismo lógico y su manipulación, invocando habilidades naturales de razonamiento que se perfeccionarían en la práctica. Sin embargo, las dificultades con las deducciones basadas en el modus tollens, con el tratamiento de condicionales o con el uso de cuantificadores han sido documentadas por varias investigaciones que invitan a analizar la pertinencia de una instrucción explícita de estos tópicos. Aunque no todas las funciones de la demostración en la comunidad matemática son igualmente relevantes en el aprendizaje, es importante considerarlas para no llevar la demostración al aula sólo como un ritual que identifica la práctica matemática, sino para presentarla como un comportamiento con "razón de ser" dentro del proceso de aprendizaje. (Hanna, 1995). "*

También queremos recuperar algunas ideas de Santaló en su libro "Enseñanza de la matemática en la escuela media" con ideas vigentes aun hoy: refiriéndose a la relación Razonamiento y memoria, expresar:

"Hay que enseñar a razonar y a practicar deducciones lógicas. La demostración de teoremas, para mostrar como por sucesivos razonamientos elementales se puede llegar a resultados no previsibles de antemano, es fundamental.

Mas adelante señala: "…Si un alumno sabe repetir la demostración de que la suma de los ángulos interiores de un pentágono convexo vale tres ángulos llanos, si el pentágono tiene una cierta posición y determinadas letras en los vértices, pero no sabe repetirla para otro pentágono con distintas letras o distinta posición, significa que ha aprendido la demostración de memoria y esto si que no tiene ningún valor. Mejor dicho, tiene un valor altamente negativo, pues indica que el alumno, no solamente ignora tal demostración, sino que desconoce totalmente lo que es la matemática y que ha desperdiciado el uso de la memoria en un objetivo inútil y nada educativo". (Santaló, pag 20, 21)[1]

Los textos seleccionados tratan de mostrar el camino que sigue la demostración en la comunidad matemática, una demostración se convierte en demostración luego del acto social de ser aceptada como tal.

"La comunidad juzga de acuerdo con ciertos criterios que incluyen una combinación de los siguientes factores: comprensión del teorema, de los conceptos involucrados, de sus implicaciones, de sus antecedentes lógicos; significancia, o sea, utilidad del resultado en alguna rama de la Matemática como para que merezca el esfuerzo de validarlo; compatibilidad con el conjunto de resultados ya aceptados por la comunidad; reputación de su autor como experto en el área del teorema; y argumentación convincente, es decir, existencia de un argumento matemático (riguroso o no) que justifique la afirmación y que sea del grupo de los razonamientos ya aceptados en el pasado". (Hanna, 1991).

El trabajo con este eje promueve un avance en la transición hacia el pensamiento matemático avanzado donde el estudiante pase de la argumentación a la demostración como método de validación de un resultado matemático. Esto implica introducir al estudiante en actividades de conjetura, verificación, debate, que fomenten el pasaje hacia explicaciones basadas en normas convenidas por el grupo, desmitificando el "ideal" de demostración como un ritual formalista característico de la comunidad matemática, que en el aula sólo puede contemplarse.

Este capítulo constituye una síntesis tratando de reunir los conceptos fundamentales que orientaron la elaboración del eje: verdad; el proceso de conjeturar, argumentar y demostrar mostrando la vitalidad de la producción del conocimiento matemático y quienes lo hacen: los matemáticos.

Se plantea una primer actividad de colorear un mapa cumpliendo algunas condiciones tratando en general un proceso de demostración de un teorema, basado en una dinámica que sigue actividades primero individual, luego de confrontación con las producciones de otros, el análisis de una solución externa; luego probar otros casos, tratar de enunciar alguna conjetura. Luego de esta primera etapa se presenta un texto de un diario con la historia sobre el proceso de su demostración, con la inclusión del uso de la computadora en dicho proceso.

La actividad con artículos de diarios de tirada nacional que contiene divulgación científica incluye una serie de noticias en los diarios del 10/01/2004; 20/08/2006 y 25/12/2006, en las cuales aparecen relatos sobre la demostración de la conjetura de Poincaré; datos su autor: el científico ruso Grigori Perelman. Se propone que el alumno identifique el enunciado de la conjetura y algunas cuestiones, acontecimiento que relatan las noticias referidas al hecho (por ej. que lo difundió por Internet, que rechazó todos los premios asociados al hecho, las características del premio Fields), y si se puede argumentar cual es el proceso de validación de un nuevo conocimiento en el mundo de la matemática, leer textos y determinar el camino de una conjetura para ser considerada un teorema, argumentación a favor y en contra de este acontecimiento, contraste con el uso de las computadoras en la demostración en matemática.

Luego se plantean una serie de actividades para comprender la implicación en matemática, la idea de condición necesaria y suficiente tratando de mostrar e identificar en enunciados simples el trabajo con hipótesis y conclusiones.

Con la actividad de contraejemplos se trata de incluir otro método de invalidar o mostrar la falsedad de una premisa y en matemática esto basa con encontrar un contraejemplo. Aquí se podría realizar algunas prolongaciones usando las propiedades de las operaciones con números que presentan dificultades en su operatoria, como sin por ejemplo las propiedades distributivas de la potenciación y la radicación.

Se presenta la clásica demostración que la raíz cuadrada de dos no es un número racional por el método de Reducción al Absurdo, con el planteo de cuestiones que exigen la lectura de la misma con la identificación de las propiedades y pertenencia a los campos numéricos de los números involucrados. Además se le pide utilizar este procedimiento para otra propiedad. Se incluyen demostraciones y argumentaciones que aparecieron a lo largo de la historia donde se propone como esquema del pensamiento de las ciencias el "existir necesariamente a partir de ciertas cosas".

La demostración atribuida a los pitagóricos para la inconmensurabilidad de la raíz cuadrada de 2, procedía según Aristóteles por "reductio ad absurdum". Se trata de la conocida demostración que hacemos en la actualidad para la irracionalidad de 2 y que fuera incluida en algunas de las antiguas versiones de los Elementos de Euclides, como Proposición 117 del Libro X.

Uno de los logros más importantes de Aristóteles fue la fundamentación de la lógica. Los griegos anteriormente habían realizado cierto grado de trabajo básico en lógica al producir razonamientos matemáticos correctos. Aristóteles sistematizó las leyes lógicas que siguen estos razonamientos abstrayéndolas de estos e identificándolas como objeto de estudio de una ciencia. Entre los principios o leyes que puso en evidencia, podemos mencionar:

- Principio de no contradicción: una proposición no puede ser a la vez verdadera y falsa
- Principio del tercero excluido: una proposición debe ser verdadera o falsa

Estas leyes se encuentran dentro del fundamento sobre el que se edifican las demostraciones indirectas, de las que nos ocuparemos especialmente en este trabajo. Aristóteles califica al principio del tercero excluido como la "verdad última a la que se remiten todos los que demuestran, pues es por naturaleza un principio, inclusive de todos los demás axiomas" (Eggers Lan, 1995, p.38).

Al final incluimos un reportaje a Sir Michael Atiyah en ocasión de la celebración del Congreso Mundial de Matemática realizado en España, donde permite mostrar algunas características del trabajo de un matemático y de su vida cotidiana.

En las actividades matemáticas, se propone a los alumnos las siguientes prácticas específicas:

- Actividad 1: Cuando las demostraciones son esquivas:

  Iniciar a los alumnos en la conjetura de los 4 colores. Determinar el menor número posible de colores para colorear regiones. Comparar resultados con sus pares y enunciar una afirmación. Discutir y elaborar en forma conjunta una conjetura para “n” regiones. Construir la idea de que enunciar una conjetura no es exclusivo del quehacer matemático. El camino de una conjetura. Intentar demostrarla. La contribución de las computadoras en el intento de la demostración.

- Actividad 2: Condición necesaria y suficiente

  Método de demostración indirecto: Identificar la hipótesis y la conclusión en un enunciado algebraico y coloquial. Escritura de un enunciado en la forma si…entonces. Determinar validez de enunciados. El proceso del Razonamiento Deductivo: Elaborar una conclusión dado ciertos datos de una figura. Determinar la validez de una generalización que se desprenda de esa conclusión y demostrarla en caso afirmativo. Utilizar propiedades y definiciones. Enunciar las propiedades y definiciones utilizadas para demostrar la conclusión. Comparar soluciones y discutir la más acertada.

- Actividad 3: Falsedad y contraejemplo

  El método del contraejemplo: Determinar la validez de un enunciado utilizando el método del contraejemplo, como parte del quehacer matemático y con la finalidad de demostrar la falsedad de los mismos.

- Actividad 4: Reducción al absurdo

  Formas de demostración. La demostración por Reducción al absurdo: Analizar e interpretar los pasos de la demostración de la raíz cuadrada de 2 por el método de Reducción al Absurdo. Completar cuadro resumiendo los pasos que se van realizando para una mejor comprensión de este método.

- Actividad 5: Lo que se cuenta sobre las matemáticas y el trabajo de los matemáticos

  La Conjetura de Poincaré: Leer textos y determinar el camino de una conjetura para ser considerada un Teorema. Argumentación a favor y en contra de este acontecimiento. Contraste con el uso de las computadoras en la demostración en matemática.

- Actividad 6: Lo que cuenta un matemático sobre las matemáticas y su trabajo

  Lo que nos cuenta un matemático: sobre las matemáticas y su trabajo. Elaborar un perfil de las actividades que desarrollan los matemáticos en contraposición a la idea general de la sociedad del “hacer” de un matemático”.

2.2.d. Para hacer un balance del trabajo. Disponibilidad de herramientas de trabajo matemático

Disponibilidad de herramientas para el trabajo matemático: tiene por finalidad que los alumnos tomen conciencia de sus fortalezas y debilidades en la disponibilidad de las herramientas matemáticas referente a: comprensión de los enunciados, conocimiento matemático, comprensión de conclusiones aportadas por los pares, que han tenido que utilizar para desarrollar las actividades del cuaderno.

2.2.e. Sobre otras actividades complementarias

Incluimos textos adicionales que el docente utilizará según sus propósitos y los intereses de su grupo.

APOLOGÍA DEL MATEMÁTICO

Un matemático, como un pintor o un poeta es un creador de modelos. Si sus modelos son más permanentes que los de ellos es porque están hechos de *ideas.* Un pintor hace modelos con formas y colores y un poeta con palabras. Una pintura puede incluir una "idea", pero la idea es generalmente trillada y sin importancia. En la poesía, las ideas tienen bastante más importancia; pero, como señaló Housman, a menudo se exagera la importancia de las ideas en la poesía: "no puede contentarme el que existan tales cosas como ideas poéticas… La poesía no es lo que se dice, sino una manera de decirlo"…

Las obras del matemático, como las del pintor o del poeta, deben ser *bellas*; las ideas, como los colores o las palabras, deben concordar de una manera armoniosa. La belleza es la primera prueba: en el mundo no hay lugar permanente para las matemáticas antiestéticas. Y aquí debo tratar el error, todavía extendido que Whiterhead ha llamado "superstición literaria", de que el gusto y la apreciación estética de las matemáticas constituyen "una monotonía confinada a unos cuantos excéntricos de cada generación".

En la actualidad difícilmente se encontraría un hombre educado completamente insensible al atractivo estético de las matemáticas. Puede ser difícil *definir* la belleza matemática, pero lo mismo sucede con cualquier otra clase de belleza; podemos no saber concretamente lo que entendemos por un poema bello, pero esto no nos impide reconocerlo cuando lo leemos…

La mayoría de la gente tiene alguna noción de matemáticas, así como la mayoría de la gente pude disfrutar de un sonido agradable y probablemente existe más gente realmente interesada en matemáticas que en música. La música puede utilizarse para estimular la emoción de la masa, mientras que las matemáticas no pueden hacerlo y la incapacidad musical se considera como algo ligeramente vergonzoso, mientras que la mayoría de la gente queda tan asustada por el hombre de matemáticas que, quizás sinceramente está a punto para exagerar su propia estupidez matemática. Basta una pequeña reflexión para mostrar lo absurdo de la "superstición literaria". En todo país civilizado existen multitud de jugadores de ajedrez y todo jugador de ajedrez puede reconocer y apreciar una jugada o problema "bonito". Con todo, un problema de ajedrez es simplemente un ejercicio de matemática pura y todo el que dice que un problema es "bonito", está alabando la belleza matemática…

Podría añadir que no hay nada en el mundo que satisfaga tanto a los hombres famosos como el descubrir o redescubrir un teorema matemática auténtico...

… Un problema de ajedrez es auténtica matemática, pero en cierta manera matemática trivial, ya que, aunque los movimientos son ingeniosos e intrincados, originales y sorprendentes, falta algo esencial. Los problemas de ajedrez no son importantes. Las mejores matemáticas son tan serias como bonitas…

… La "seriedad" de un teorema matemático reside, no en sus consecuencias prácticas, que generalmente son despreciables, sino en el significado de las ideas matemáticas que relaciona. Diremos, a grandes rasgos, que una idea matemática es "significativa" cuando puede relacionarse, de manera natural e ilustrativa, con una buena colección de otras ideas matemáticas. De esta manera un teorema matemática serio, un teorema que relaciona ideas significativas, es probable que produzca importantes progresos en las matemáticas e incluso en otras ciencias. Ningún problema de ajedrez ha afectado nunca el desarrollo general del pensamiento científico; en su época, Pitágoras, Newton y Einstein han cambiado totalmente su dirección… La *belleza* de un teorema matemático depende en gran parte de su seriedad…

… Enunciaré y demostraré uno de los más famosos teoremas de las matemáticas griegas. Son teoremas simples, simples de concepto y de ejecución, pero no hay duda que son teoremas de la más alta clase. Cada uno de ellos es tan lozano y significativo como cuando fue descubierto; dos mil años no han escrito ninguna novedad en ninguno de ellos. Finalmente, un lector inteligente puede asimilar los enunciados y las demostraciones en una hora, a pesar de su limitado equipo matemático.

El primero es la demostración de Euclides de la existencia de una infinidad de números primos. Los números primos son **(A)** 2, 3, 5, 7, 11, 19, 23, 29, … que no pueden separarse en factores más pequeños. Así, 37 y 317 son primos. Los primos son el material del que construyen por multiplicación todos lo números: así 666 = 2 . 3 . 3 . 37. Todo número que no es primo es divisible, por lo menos, por un primo. Tenemos que demostrar que existen infinitos números primos, o que la serie **(A)** nunca llega al fin. Supongamos que lo haga y que 2, 3, 5, …, P sea la seria completa (de manera que P sea el primo más grande) y, en esta hipótesis, consideremos el número Q definido por la fórmula Q = (2 . 3 . 5 . … . P) + 1. Es evidente que Q no es divisible por ninguno de los 2, 3, 5, …, P; ya que queda resto 1 cuando dividimos por cualquiera de estos números. Pero si él no es primo es divisible por algún primo y, por tanto, existe un primo (que puede ser el mismo Q) mayor que cualquiera de ellos. Esto contradice nuestra hipótesis de que no existe ningún primo más grande que P; por lo tanto, esta hipótesis es falsa. La demostración es por el método de *Reducción al Absurdo* que tanto gustaba a Euclides, una de las más sutiles armas matemáticas. Es un gambito más fino que cualquier gambito de ajedrez: un jugador de ajedrez puede ofrecer el sacrificio de un peón o incluso de una pieza, pero un matemático ofrece la *jugada...* (El otro es la de raíz cuadrada de 2)

… Podría citar muchos sutiles teoremas de la teoría de números cuyos significados todos pueden comprender. Por ejemplo, el llamado "Teorema fundamental de la Aritmética", que cualquier número entero puede descomponerse, *de una sola forma*, en un producto de primos. Así, 666 = 2 . 3 . 3 . 37, y no existe otra descomposición. Este teorema es, como su nombre lo indica, el fundamento de la aritmética superior, pero la demostración, aunque no es difícil, requiere un cierto prefacio y un lector no matemático podría encontrarla tediosa.

… He dicho que un matemático era un constructor de modelos de ideas y que sus modelos debían juzgarse por los criterios de belleza y seriedad. Difícilmente pueda creer que cualquiera que haya comprendido los dos teoremas quiera discutir que ellos superan estas pruebas.

… En primer lugar, la superioridad de los teoremas matemáticos en cuando a *seriedad* es obvia y abrumadora. El problema de ajedrez es producto de un complejo de ideas ingenioso pero muy limitado, que no difieren esencialmente unas de otras y que no tienen repercusiones externas. Nosotros pensaríamos de la misma manera si el ajedrez no se hubiera inventado nunca, mientras que los teoremas de Pitágoras y Euclides han tenido profunda influencia en el pensamiento, incluso fuera de las matemáticas. Así, el teorema de Pitágoras es vital para roda la estructura de la aritmética, y el teorema de euclides nos asegura que hay abundante material para la tarea. Pero el teorema de Pitágoras tiene aplicaciones más amplias y ofrece un tema mejor.

Primeramente observaríamos que el argumento de Pitágoras puede extenderse más y puede aplicarse, con un pequeño cambio de principio, a clases mucho más extensas de "irracionales". Podemos probar de manera muy semejante que $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}$ son irracionales o que $\sqrt[3]{2}$, $y \sqrt[3]{17}$ son irracionales.

SIGMA. James R. Newman. El mundo de las matemáticas. Nº5.
Apología del Matemático. G. H. Hardy. Pág. 416 - 423

Actividad sobre el texto de Hardy

1. ¿En qué consiste según Hardy la belleza de un teorema matemático?
2. El texto se refiere a uno de los conceptos matemáticos más usados dentro de la teoría de números. Explique cuál es, y los teoremas y propiedades relacionados al mismo que enuncia.
3. ¿Cuáles son las ampliaciones que propone respecto a los dos teoremas tratados?

LA LÓGICA MATEMÁTICA

A mediados del siglo XIX el álgebra invade un campo virgen o casi virgen: la lógica. Es indudable que la vinculación de la lógica con la matemática es más estrecha, o si se quiere más clara y evidente, que con cualquiera de las otras ciencias. No solo el encadenamiento deducido se torna más transparente en matemática, sino que se puede notar en todas las fase de su desarrollo, incluso de los sistemas de numeración y de medida más empíricos. Sin acudir al "álgebra babilónica", donde brilla ya la mentalidad matemática, dicho encadenamiento puede advertirse en los problemas egipcios. ¿Cómo, de otro modo, podría explicarse la solución de problemas como éste: determinar los cinco términos de una progresión aritmética conociendo su suma y la razón de la suma de los dos primeros a la de los tres últimos?

Si en las culturas prehelénicas el proceso lógico aún queda oculto, entre los griegos de la época clásica ese proceso se evidencia, por modo inexcusable, en el más preclaro de sus descubrimientos, que es la demostración.

Si bien los principios lógicos se vislumbran en la obra de Parménides y, sobre todos, en la "dialéctica" de Zenón de Elea, fundador de la lógica según Aristóteles, es a éste a quien se debe la creación de la lógica formal, que se mantendrá estancada e incólume hasta casi los tiempos presentes.

Mientras las leyes del silogismo aristotélico se mantenían sin mayores adiciones o afinamientos, el razonamiento matemático, cuya nitidez lo independizaba de aquellas, seguía progresando y produciendo nuevos brotes.

Con el desarrollo del álgebra hacia el siglo XVII comenzó a advertirse cierta analogía entre la deducción algebraica y las reglas silogísticas, en vista de que, tanto en un caso como en el otro, letras “vacías” podían llenarse con entes o proposiciones cualesquiera.

Es explicable que tales ideas encuentren una primera expresión concreta en Leibniz (1646-1716), a la vez matemático y filósofo, verdadero precursor de la lógica matemática. Persiguiendo una idea que lo acosa desde su juventud –en pos de un alfabeto de los pensamientos humanos” y de un “idioma universal”- se propone el proyecto de construir una “característica universal”, especie de lenguaje simbólico capaz de expresar, sin ambigüedad, todos los pensamientos humanos.

La idea de Leibniz, que contienen muchos conceptos de la lógica simbólica de hoy, no tuvieron entonces mayor influencia, pues quedaron inéditas hasta este siglo. Igual destino tuvieron ideas semejantes esbozadas durante el siglo XVIII y comienzos del siglo XIX.

Las cosas cambian a mediados del siglo, cuando en 1854, George Boole (1815-1864) publica su *The Lawx of Thought* que lo convierte en el verdadero fundador de la lógica simbólica. Del contenido y objeto del libro da cuenta este párrafo:

“El objeto del siguiente tratado es investigar las leyes fundamentales de las operaciones de la mente, en virtud de las cuales se razona; expresarlas en el lenguaje de un cálculo y sobre tal fundamento establecer la ciencia de la lógica y construir su método; hacer de ese método la base de un método general para la aplicación de la teoría matemática de las probabilidades y, finalmente, recoger de los diversos elementos de verdad que surgen en el curso de esta investigación algunas informaciones probables referentes a la naturaleza y constitución de la mente humana…”

Aunque, como puede advertirse en el párrafo anterior la finalidad y el contenido del libro de Boole fueron bastante heterogéneos, el desarrollo de la lógica simbólica que contiene resultó de valor permanente. Aún restándole cierto matiz partidario, la frase muy citada del logicista Bertrand Russel (1872-1970): “la matemática pura fue descubierta por Boole”, pone de relieve la importancia del escrito de éste, cuya tendencia a la abstracción muestra, por otra parte, la característica de los matemáticos ingleses de la época. De ahí que se advirtiera en ese escrito la influencia de uno de los pioneros de esa tendencia: George Peacock (1791-1858).

En 1830, Peacock publicó un tratado del álgebra en el que acentúa el carácter formal y simbólico de las reglas del álgebra y por ello se le ha considerado un precursor del llamado “principio de permanencia de las leyes formales”, enunciado por el matemático e historiador de la matemática Hermann Hankel 81839-1873).

Como el primer escrito de Boole sobre el tema data de 1847, es posible que haya en él cierta influencia de la obra de Peacock. De todos modos el libro de aquél, de 1854, abre nuevos horizontes a la investigación lógica, que se prosigue den dos direcciones; por un la de se hace más independiente de la matemática; y por el otro, en cambio, busca una vinculación cada vez más estrecha con ella hasta confundirse ambas y culminar en las actuales “álgebras de Boole”.

Charles Senders Peirce (1839-1914) fue un filósofo que se cuenta entre los fundadores del pragmatismo norteamericano y un matemático que se ocupó de la lógica matemática, perfeccionó la lógica de Boole y definió nuevos conceptos, como los "valores y tablas de verdad". Por su parte, Friedrich Frege (1848-1925) expuso en forma minuciosa y precisa conceptos cuya importancia se revelará más tarde tanto en la lógica como en el análisis de los fundamentos de la matemática, pero que en su tiempo, en parte por el complicado e inusitado simbolismo empleado, no ejercieron mayor influencia y sólo se conocieron en este siglo sobre todo a través de la obra de Russell.

Mientras tanto aparecía la contribución de los logicistas italiano, encabezados por Giuseppe Peano (1858-1932), que cristalizó en los "formularios matemáticos" aparecidos a fines de siglo y que proponen exponer en un lenguaje puramente simbólico, no sólo la lógica matemática, sino también los resultados más importantes de diversas ramas matemáticas.

Si bien la labor de Peano y sus colaboradores fue en sus comienzos criticada, más por exceso de ciertas pretensiones de la doctrina que por el empleo exclusivo de símbolos que daban a la obra un aspecto desusado, el saldo definitivo fue favorable pues buena parte de los símbolos de Peano: los de pertenencia, unión, intersección, etc., se conservan hoy. Por su parte, su labor contribuyó a robustecer la corrientes general que puso cada vez más en evidencia las conexiones de la lógica matemática.

Esta corriente desembocó, ya en este siglo, en los *Pincipia matemática*, obra que, entre 1910 y 1913, publicó Bertrand russel en colaboración con un matemático de mentalidad filosófica: Alfred Whitehead (1861-1947). Esta obra es una síntesis en que se combinan armoniosamente los resultados de Frege y de Peano o, como dice Bourbaki, "la precisión de Frege con la comodidad de Peano", y que representa a comienzos de este siglo la expresión más acabada de la lógica matemática, o mejor, de acuerdo con su orientación, de la matemática como lógica.

FUENTE: Historias de las ideas modernas en Matemática. José Babini. Universidad de Buenos Aires. Serie de Matemática. Secretaria General de la Organización de los Estados Americanos. Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico. Cap.6. Pág. 39-44.

LA MATEMÁTICA COMO FILOSOFÍA Y COMO CIENCIA

La filosofía trata de entender y explicar la esencia, propiedades, causas y efectos de las cosas naturales. Sus fines son paralelos a los de la matemática, que en muchos aspectos le sirve de instrumento y, por ello, casi hasta la Edad Moderna, filosofía y matemática se hallaban estrechamente ligadas. Por tradición y naturaleza, la matemática también es una filosofía, si bien una filosofía más apta para cuantificar las leyes y los fenómenos naturales, e incluso para dominarlos y encauzarlos en provecho propio.

Son ejemplos de la matemática como filosofía los conceptos de espacio y tiempo. La filosofía nunca hizo tan comprensible la idea de espacio como Maurice Frechet en su tesis sobre los espacios abstractos (1906) y los trabajos sucesivos de los matemáticos Hausdorff (1914) y Banach (1932). Eisntein y Minkowski, con sus geometrías del espacio-tiempo, aportaron claridad y bases sólidas a teoría filosóficas sobre los conceptos fundamentales de espacio y tiempo. Los límites de la matemática con el resto de las ciencias son imprecisos y dependen de la formación de cada uno. Cuando en 1888, David Hilbert demostró sus teoremas sobre la teoría de los invariantes, el matemático Gordan exclamó: "esto no es matemática, es teología".

La matemática se distingue de la filosofía porque es, al mismo tiempo, una ciencia. Si por ciencia se entiende un conjunto de sistematizado de conocimientos, que constituyen una rama del saber humano, la matemática es la ciencia por excelencia. Ha sido considerada como la base de las llamadas ciencias exactas –para distinguirlas de las ciencias naturales-. En realidad, la idea de que las matemáticas son exactas prevaleció hasta el presente siglo, se ha ido desvaneciendo con la incorporación de las probabilidades y la estadística, y por la necesidad de considerar y tratar conceptos aleatorios o con un cierto margen de ambigüedad, como los llamados conjuntos borrosos. Actualmente, el nombre clásico de las Facultades de Ciencias Exactas tiende a ser Facultades de Matemática. La exactitud se ha ido perdiendo en los objetivos o en los resultados de la matemática, aunque todavía se conserva, naturalmente, en sus razonamientos. Los siglos XVIII y XIX fueron de gran éxito para la mecánica celeste, ciencia exacta por excelencia, pero, en el siglo XX, la matemática ha iniciado el estudio de fenómenos y problemas menos exactos (aunque igualmente susceptibles de ser tratados rigurosamente, vía matemática), como los procesos estocásticos, la reconstrucción de imágenes, las teorías de la información o el análisis de decisiones.

FUENTE: Luis Santaló: “la matemática: una filosofía y una técnica”,
cap.1: La matemática: Técnica, Arte, Filosofía y Ciencia., Ed. Ariel, Nº124.)

Actividad sobre el texto de Santaló.

1. - ¿Por qué afirma el autor que la matemática y la filosofía tienen fines paralelos?
2. - Investiga quién fue Luis Santaló.
3. - Alguien afirma: “La matemática es una ciencia exacta, porque siempre 2 + 2 = 4”. Piensa argumentos a favor y otros en contra de tal afirmación.
4. Dentro de la clasificación de las ciencias, Santaló enuncia que la matemática como ciencia exacta fue sólo hasta el siglo XX. ¿En qué basa el autor esta afirmación?
5. – El autor afirma: “… la matemática ha iniciado el estudio de fenómenos y problemas menos exactos (aunque igualmente susceptibles de ser tratados rigurosamente, vía matemática); como los procesos estocásticos, la reconstrucción de imágenes, las teorías de la información o el análisis de decisiones.” Busca información sobre estos temas en distintas fuentes y elabora un cuadro con información sobre los mismos.
6. De ejemplos de las contribuciones que hicieron a la matemática y a la filosofía: Pitágoras, Descartes, Pascal, Leibniz.
7. En el sitio “Ciencia Hoy” *http://www.cienciahoy.org.ar/hoy02/seccionesindis cretas.htm* aparece un artículo del mismo autor. Elabora una pequeña síntesis sobre el mismo cuya estructura sea algunas de las contribuciones de la matemática a otros campos del saber.

LA BELLEZA EN MATEMÁTICAS
Francois Le Lionnais

> *Nunca Circe tuvo más poder sobre Ulises que el que esa maravillosa ciencia tiene sobre el espíritu, una vez que se han superado las dificultades.*
> R. BAUDEMONT
>
> *Desconfiad de los hechizos y atractivos diabólicos de la geometría.*
> FÉNELON
>
> *Las matemáticas, cuando se las comprende bien, poseen no solamente la verdad, sino también la suprema belleza.*
> BERTRAND RUSSELL

La belleza aparece a menudo en los festines a los que solo había invitado a la utilidad y la verdad. ¿Cómo permanecer entonces insensible a las seducciones con que las adorna? Lo mismo ocurre con todas las ramas de la acción o del saber, pero en ninguna con tanta fuerza como en las matemáticas. Sin duda, el Occidente modero no ha rectificado la opinión de la antigua Grecia que, hasta Euclides, tuvo a las matemáticas por un arte más que por una ciencia. A pesar de todo, muy a menudo fueron hechizantes satisfacciones estéticas las que incitaron a los matemáticos modernos a cultivar tan ardientemente su estudio.

Algunos de los escritores más refinados han dado testimonio de esta satisfacción. Así, Novalis escribe: *El verdadero matemático es entusiasta "per se". Sin entusiasmo no hay matemáticas.* Y también: *El Álgebra es la poesía.*

Los Goncourt dicen: … *las matemáticas y lo que éstas tienen de cautivante.*

Pero son los mismos matemáticos los que han dejado los testimonios más apasionados.

Charles Meray escribe:

Leyendo las memorias de Gauss, cuya edad caso secular no ha atenuando su exquisita frescura, ¿no hallamos asimismo en los detalles esos espléndidos arabescos enlazados por la imaginación inagotable de los artistas de Oriente, y en el conjunto uno de esos templos maravillosos que los arquitectos de Pericles elevaban a las divinidades helénicas?

He aquí cómo Painlevé evoca la enseñanza de Charles Hermite: *Los que han tenido la dicha de ser alumnos del gran geómetra no pueden olvidar el tinte caso religioso de su enseñanza, el estremecimiento de la belleza o de misterio que hacía correr a través de su auditorio ante algún admirable descubrimiento o ante lo desconocido.*

El eminente lógico Bertrand Russell ha discernido perfectamente esa calidad superior por la cual la reina de las ciencias puede aspirar a la corona reservada a las artes:

El verdadero espíritu de alegría, de exaltación, el sentimiento de ser más que un hombre, que son la piedra de toque de la excelencia más elevada, se hallan en las matemáticas como en la poesía.

Si bien algunos grandes matemáticos supieron expresar líricamente su entusiasmo por la belleza de su ciencia, nadie se propuso inclinarse sobre ella como sobre un objeto de arte –el arte matemático- y por consecuencia hacer de ella el tema de una estética, la estética de las matemáticas.

Extraído de LAS GRANDES CORRIENTES DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO.
Francois Le Leonnais y colaboradores. Editorial Universitaria de Buenos Aires.
Tercera Parte. Arte y Estética. Las Matemáticas y la Belleza. Págs. 464-485

LA FENOMENOLOGÍA DE LA BELLEZA MATEMÁTICA

Gian – Carlo Rota

Mientras que pintores y músicos probablemente se avergüencen ante a los comentarios acerca de la belleza de su trabajo, los matemáticos disfrutan el entretener discusiones acerca de la belleza de las matemáticas. Los artistas profesionales enfatizan los aspectos técnicos de su trabajo en lugar de los estéticos.

A los matemáticos, en cambio, les gusta hacer juicios sobre la belleza de sus piezas de matemática favoritas. Una mirada superficial nos hace ver que las características de la belleza matemática no coinciden con las de la belleza artística. Los cursos en “apreciación artística” son bastante comunes; resulta impensable encontrar cursos en “apreciación de la belleza matemática”. Intentaremos develar el sentido del término “belleza”, tal como es usado por los matemáticos.

¿Qué tipo de matemáticas pueden ser hermosas?

Teoremas, demostraciones, teorías matemáticas enteras, un corto paso en la prueba de un teorema, definiciones, son considerados por los matemáticos, en distintos momentos, como hermosos o feos. Con mayor frecuencia, la palabra “hermoso” se aplica a teoremas. En segundo lugar encontramos las demostraciones; una prueba que ha de ser juzgada hermosa tiende a ser corta. Se suele considerar que los teoremas hermosos son capítulos cortos, auto-contenidos, que encajan en teorías más amplias. Hay teorías complejas en cuya belleza todo matemático coincide, pero no suelen ser los ejemplos que vienen a la mente al hacer una lista de las piezas hermosas de la matemática.

Las teorías que los matemáticos consideran hermosas raramente concuerdan con las que el público educado imagina. Por ejemplo, la geometría euclídea clásica se propone a menudo por los no-matemáticos como paradigma de una teoría matemática hermosa, pero nunca he escuchado a un matemático profesional clasificarla como tal.

Ejemplos

El teorema que afirma que en tres dimensiones hay sólo cinco sólidos regulares (los sólidos platónicos) es, por lo general, considerado hermoso; sin embargo, no puede decirse que ninguna de las pruebas de este teorema, por lo menos las que conozco, sean hermosas. De manera similar, el teorema del número primo es un hermoso resultado con respecto a la distribución de los primos, pero ninguna de sus pruebas puede considerarse particularmente hermosa. La opinión de Hardy de que mucha de la belleza de una afirmación matemática o de una demostración matemática depende del elemento sorpresa es, en mi opinión, equivocada.

Es verdad que la belleza de una pieza de matemáticas se percibe a menudo con una sensación de agradable sorpresa; sin embargo, se pueden encontrar resultados sorprendentes que nadie nunca ha clasificado como hermosos. El teorema de Morley, que afirma que los trisectores adyacentes de un triángulo arbitrario se encuentran en un triángulo equilátero, es incuestionablemente sorprendente, pero ni la afirmación, ni ninguna de sus pruebas, resultan hermosos a pesar de los repetidos intentos por dar pruebas eficientes. Una gran cantidad de teoremas matemáticos, cuando son publicados por primera vez, parecen sorprendentes; más o menos hace veinte años la prueba de la existencia de estructuras diferenciables no equivalentes sobre esferas de dimensión alta se consideraba sorprendente, pero a nadie se le ocurrió, ni entonces ni ahora, llamar hermoso a ese hecho.

Este ejemplo muestra que la belleza de una teoría matemática es independiente de sus cualidades estéticas, o de su falta de ellas, de la exposición rigurosa de la teoría. Algunas teorías hermosas talvez nunca van a tener una presentación que iguale su belleza. Una instancia más de una teoría hermosa que nunca ha sido igualada en belleza en su presentación es la deducción natural de Gentzen.

El concepto de belleza matemática

Los matemáticos están preocupados por la verdad. En matemáticas, sin embargo, existe una ambigüedad en el uso de la palabra “verdad”. Esta ambigüedad puede ser observada siempre que los matemáticos reclaman que la belleza es la *raison d’être* de la matemática, o que la belleza matemática es ese rasgo que le da a la matemática un rango único entre las ciencias. Estas pretensiones son tan viejas como la matemática, y nos llevan a sospechar que la verdad matemática y la belleza matemática deben estar relacionadas. La belleza matemática y la verdad matemática comparten una propiedad importante. Ninguna de las dos admite grados. A los matemáticos les fastidia la verdad por grados que observan en las otras ciencias. Los matemáticos preguntan: “¿Para qué sirve?” cuando quedan desconcertados por un enunciado matemático, y no porque no puedan seguir la prueba o sus aplicaciones. Más bien lo contrario. Lo que sucede es que el matemático ha podido verificar su verdad en el sentido lógico del término, pero aún algo falta. El matemático que está perplejo y pregunta “¿Para qué sirve” no ha captado el sentido del enunciado que ha sido verificado como verdadero. La verificación sola no nos da la clave del rol que juega el enunciado dentro de la teoría; no nos explica la relevancia del enunciado. En pocas palabras, la verdad lógica del enunciado no nos *ilustra* acerca del *sentido* del enunciado. La *ilustración7* y no la verdad es lo que el matemático busca cuando pregunta: “¿Para qué sirve?”. La *ilustración* es un rasgo de la matemática acerca del que se ha escrito muy poco.

La propiedad de *ilustrar* se atribuye de manera objetiva a ciertos enunciados matemáticos y se le niega a otros. El que un enunciado matemático *ilustre* o deje de hacerlo puede ser sujeto de discusión entre matemáticos.

Cada profesor de matemáticas sabe que los estudiantes no habrán aprendido sólo con asir la verdad formal del enunciado. Los estudiantes deben ser *ilustrados* por el sentido del enunciado, o se retirarán. El *ilustrar* es una cualidad de los enunciados matemáticos que uno a veces percibe y a veces no, como la verdad. Un teorema matemático puede ser *ilustrante* o no, así como puede ser verdadero o falso.

Gian-Carlo Rota – Pensamientos Indiscretos – traducción: A. Martín – A. Villaveces

Actividad para el texto de Rota

1. Dadas las siguientes afirmaciones:

“Las matemáticas son un arte más que una ciencia”….

BERTRAND RUSSELL

“El verdadero espíritu de alegría, de exaltación, el sentimiento de ser más que un hombre, que son la piedra de toque de la excelencia más elevada; se hallan en las matemáticas como en la poesía”.

BERTRAND RUSSEL

Elabore una conclusión de que entiende Ud. acerca del significado de belleza que dan los autores.

2. El texto plantea un agrupamiento de las obras de arte, bajo dos rótulos: el clasicismo y el romanticismo.

En el libro Matemática…¿Estás ahí? Episodio 2, pág. 17 a 23: “Enseñar a pensar”, Paenza (Dr. en Matemática) afirma: “… una mañana, de las centenares que pasamos juntos; mientras tomábamos café, nos miramos con Quinquin y recuerdo que nos quedamos callados por un instante. Uno de los dos dijo algo que nos hizo pensar en lo mismo: ¡Acabamos de entender el enunciado!. Por primera vez, y a más de un año de haberlo escuchado a Miguel, comprendíamos lo que teníamos que hacer. De ahí en adelante, algo cambió en nuestras vidas: ¡Habíamos entendido! Lo destaco especialmente porque fue un día feliz para los dos".

Relacione este párrafo y lo expresado por Bertrand Russell y elabore una interpretación.

IDEALISMO FILOSOFICO

Paul Mouy

Se cuenta que cuando Pitágoras descubrió el Teorema que lleva su nombre ofreció a Apolo una hecatombe. La fecha, en efecto, aunque la ignoremos y aunque la personalidad legendaria del Pitágoras no tenga mucha importancia en el acontecimiento, era verdaderamente solemne, pues marcaba el comienzo del pensamiento racional y de la filosofía idealista.

El origen de las matemáticas es, sin duda, múltiple. Debe buscárselo en el cielo y en la tierra; en el cielo estrellado, donde las constelaciones planteaban el enigma doble del número y de la figura, del número hecho figura,; en la tierra, entre las técnicas de los agrimensores de los "medidores de tierra" (geómetras) y de los calculadores que hacían el balance de las entradas y las salidas de mercancías de numerario en las casas nobles y en los estados. Hubo un saber surgido a la vez de las técnicas de medida y "logísticas", y de las observaciones astronómicas.

En efecto, el primer rasgo que asombra en las ciencias matemáticas es que son un saber real relativo a las cosas, que muerde, por decirlo así, la materia, que parece salido de ella y es homogéneo con ella. Un triángulo es una realidad. Y también un número. Uno y otro tiene propiedades, una naturaleza, que parecen existir fuera del espíritu y dictarle sus leyes.

Es verosímil también que durante mucho tiempo, quizá durante milenios, las matemáticas hayan parecido artes empíricas y mágicas, como la agricultura y la medicina, una especie de hechicería eficaz.

Pero los griegos inventaron la *demostración matemática*. ¿Qué griegos? Quizá Pitágoras, quizá Thales. "el primero que demostró el triángulo isósceles, llámese Thales o como se quiera, recibió una iluminación, en la cual halló que no era necesario atenerse a lo que veía en la figura… para derivar sus propiedades, sino que necesitaba engendrar por construcción esta figura por medio de lo que él pensaba acerca de ella y se representaba *a priori* por concepto, y que para conocer con certidumbre una cosa *a priori* no debía atribuir a esta cosa más que lo que derivaba necesariamente de lo que él mismo había puesto en ella conforme a su concepto". Así se expresa Kant en el prefacio de la segunda edición de la *Crítica de la Razón Pura.*

En efecto, ¿qué es demostrar? Ante todo, es hacer necesario. La necesidad, la *Ananké* griega, es primitivamente la fatalidad ciega que surge de las cosas y que arrastra a los hombres a la perdición, que conduce pérfidamente a Edipo al incesto y al parricidio. Es una idea de hombre primitivo.

Gracias a la demostración matemática, la idea, sin cambiar de nombre, pasa del exterior al interior, de las cosas al espíritu, del dominio místico al dominio racional. Era lo que constreñía al hombre contra toda razón y se convierte en lo que el hombre, por la razón, se constriñe a seguir. Constituye una obligación del espíritu, un valor intelectual, el valor mismo.

Demostrar es también fundamentar *a priori*. La expresión *a priori* es una creación de los escolásticos con la que designaban la dirección en ese movimiento por el cual el espíritu va de los principios o de las causas a las consecuencias o a los efectos. Y en este sentido no se puede decir que la demostración matemática sea siempre *a priori*. No lo es cuando procede analíticamente, como ocurre en el álgebra, por ejemplo, donde se va de la ecuación, que es la consecuencia, a la raíz, que es su principio. Pero Kant dio a la expresión *a priori* el sentido que hoy se le da universalmente: ser independiente de la experiencia. De acuerdo con esto, toda demostración matemática es *a priori* porque procede sin recurrir a medidas experimentales, a estimaciones de ángulos o de lados. Durante mucho tiempo los hombres se contentaron con estas estimaciones empíricas. En algunos pueblos orientales, el valor de ð (phi) es igual a 3 y una cuerda, medición que además es sumamente grosera. Pero los griegos no se contentaron con esta aproximación. Por el mismo impulso del pensamiento que les hizo inventar la demostración, idearon un método de aproximación racional exhaustiva que permitía estrechar indefinidamente, con la proximidad que se deseara y siempre sin tomar nada de la experiencia, el valor de la circunferencia comparada con la del diámetro. Ello fue obra de Arquímedes, y si éste no la pudo terminar, si sólo pudo completársela al cabo de veinte siglos, fue porque era menester pasar por el álgebra y el desarrollo en serie para conservarle hasta el fin su rigor racional. Pero el principio estaba conquistado; ya no es posible contentarse con lo que aporta la experiencia, es necesario que la razón reine como soberana.

No obstante, hemos llegado solamente a un concepto negativo del *a priori*. A priori no significa todavía más que *no experimental*, o mejor aún, no empírico (pues, es muy posible, y nosotros asó lo creemos, que lo experimental contenga el *a priori* como uno de sus ingredientes).

Pero si el *a priori* excluye todo lo que le aporta la experiencia *bruta*, es decir puramente pasiva y en cierto sentido crédula, hay que pensar que su valor proviene de otro lado, y por lo tanto, del espíritu mismo. Ser *a priori* significa, pues, en el sentido positivo "ser en virtud de un determinismo o de una razón", como dice Hamelin, o también puede decirse que el *a priori* es el "espíritu dentro de sí". Por tanto, el *a priori* es lo inteligible, lo puro.

¿Pero qué es lo inteligible? ¿Qué es comprender? Esta es una cuestión que nos arrojaría "en pleno mar", como dice Leibniz, si no tuviéramos precisamente que afirmarnos y para guiarnos el apoyo de las matemáticas. Cuando se busca fuera de la matemática, en lógica por ejemplo, el tipo de inteligibilidad, todo lo que encuentra es que el espíritu, para ser él mismo y para permanecer fiel a sí mismo, no debe dejar de pensar lo que ha pensado antes.

Es lo que se llama la *identidad*. Se llegaría, pues a la idea de que la inteligibilidad es la identidad, o como dicen los logísticos modernos, que el principio supremo del pensamiento es el principio de *tautología*. ¿Pero cómo no ver que de este modo se condena el espíritu a la esterilidad? ¿Cómo no ver, sobre todo, que se da una idea muy falsa de las operaciones del espíritu en matemáticas? Si pensar fuese identificar, todo razonamiento se limitaría a no perder, o a perder lo menos posible, de lo que se ha puesto antes en las premisas. Sobre todo, quedaría prohibido agregar nada, pues el enriquecimiento arbitrario sería mucho más culpable que el despilfarro.

Extraído de LAS GRANDES CORRIENTES DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO.
Francois Le Leonnais y colaboradores. Editorial Universitaria de Buenos Aires.
Tercera Parte. Cap. Las Matemáticas y la Filosofia. Págs.397-405

Decidir ...

¿ qué variables considerar?

3. Decidir ... ¿ qué variables considerar?

Dentro de la heterogeneidad de sistemas productivos que podemos encontrar en el país, se analizan distintas alternativas de producción que permitan incrementar el beneficio económico y financiero de las actividades agrícolas ganaderas y/ o de sus productos derivados, a fin de aminorar el impacto de riesgo sobre la sustentabilidad.

Es sabido que la mayoría de los productores agropecuarios toman decisiones sobre la base de señales de precios de mercado; es indiscutible la relevancia de los precios de los productos en la determinación de los resultados del negocio agropecuario y por ende, en las decisiones de producción.

Conociendo las relaciones técnicas del proceso de producción y precios de insumos, servicios y gastos fijos, se puede estimar la estructura de costos, mientras que los ingresos estarán determinados por el valor que se obtenga de la producción en el mercado. Si bien hay variaciones en los valores del producto y en el precio de los insumos y demás gastos relacionados, una variación en el precio del producto final incide directamente en la rentabilidad de la actividad productiva.

agropecuaria, utilicen modelos matemáticos: sistemas de ecuaciones e inecuaciones y matrices, que permitan la optimización de los recursos agropecuarios, a fin de incrementar la sostenibibilidad de dicho sector.

Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo matemático de la realidad (matemática o extra matemática) que se quiere estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Y la actividad de modelización matemática supone la toma de múltiples decisiones para enfrentar el problema que se está resolviendo: cuáles son las relaciones relevantes sobre las que se va a operar, cuáles son los símbolos que se van a utilizar para representarlas, cuáles son los elementos en los que apoyarse para aceptar la razonabilidad del modelo que se está usando, cuáles son las propiedades que justifican las operaciones que se realicen, cómo reinterpretar los resultados de esas operaciones en el problema...

2.3.a. Sobre el Capítulo 1: Seleccionar variables (actividades tambo y agricultura).

En este capítulo se pretende, a través del desempeño económico de empresas mixtas tambo-agricultura del sur de la provincia de Santa Fe en el período 1993/94 – 2003/04, analizar cuales son las principales variables que inciden en la rentabilidad de las mismas, con el propósito de poder delinear la problemática de la sustentabilidad y reflexionar sobre las conclusiones obtenidas en el estudio económico seleccionado.

Aunque el tambo es una actividad de menor importancia relativa en la región, es una alternativa que puede tenerse en cuenta para incrementar la sostenibilidad del sector agrario en el sur santafesino, tanto desde una perspectiva agronómica -por los efectos positivos que tendría una rotación pastoril- y social, puesto que el tambo puede brindar altos retornos por unidad de superficie, que es el factor de producción más escaso en los pequeños productores.

Desde la matemática, se plantean una serie de actividades: analizar y comparar tablas y gráficos, traducir al lenguaje algebraico los enunciados verbales, repasar las técnicas de resolución y comprobar el resultado explicitando que la solución o soluciones son un conjunto de valores que deben cumplir simultáneamente todas las ecuaciones del problema. Se aborda además la clasificación de los sistemas según su resolubilidad (compatibles determinados e indeterminados, e incompatibles). Es decir proponemos el análisis del comportamiento de conjuntos de relaciones entre variables, a través de la resolución de sistemas de ecuaciones, lo que permitirá prever acciones futuras de una empresa.

En la actividad 1: a partir del análisis y comparación de las tablas 1 y 2 se pretende mostrar que la cantidad de vacas no desciende de igual forma que el número de tambos, y que la productividad depende del incremento de carga animal y de la producción por vaca, lo que permitirá hacer una primera conjetura acerca de qué sugerir a una empresa mixta que se dedica al tambo y a la agricultura.

En la actividad 2: se dan los indicadores que permiten evaluar la eficiencia en el uso de los recursos de una empresa agrícola y de una empresa tambera, que permitirán hacer el análisis comparativo de la rentabilidad de ambos modelos dados por una tabla y un gráfico. La tabla 9, establece la relación entre el margen bruto e ingreso neto de la agricultura y el tambo, y el gráfico 3 la rentabilidad de ambos modelos. El gráfico permite identificar de manera más rápida las campañas donde los modelos compiten o donde se dan las mayores diferencias. En cambio su visualización en la tabla requiere de la identificación e interpretación de los conceptos involucrados, para dar respuesta a las cuestiones planteadas para el gráfico, y que tiene que ver con analizar la razón entre ingresos.

Teniendo como finalidad la comparación de la rentabilidad de ambos modelos, se plantea una situación que se modeliza a través sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas, utilizando los datos suministrados en el cuadro del modelo agrícola, donde se relaciona la cantidad de ha sembradas de soja y de maíz en relación a los quintales de granos obtenidos en las campañas 1993/94 y 2003/04. Se analiza qué ocurre con la producción total si se rotan o varían las ha sembradas de los cultivos antes mencionados y con cuales de las alternativas se obtiene mayor productividad y/o ingreso bruto. Con los datos estadísticos del modelo tambo se compara el ingreso bruto de ambos modelos correspondientes a los mismos períodos para relacionar la productividad de los mismos. Luego se compara la rentabilidad de cada modelo lo que permitirá concluir que el tambo resulta ser una actividad competitiva de la agricultura tanto a nivel de Margen de Bruto como a nivel de Ingreso Neto debido a la productividad del tambo (kgGB/ha) y al precio de la misma. Y teniendo en cuenta los resultados históricos, dados mediante la gráfica 3 y la tabla 9, parece aconsejable diversificar la producción, implementando ambas actividades.

En la Actividad 3: se analizan las variables que intervienen en la producción y comercialización de la leche; la incidencia de la capacidad de los tambos en el precio de la misma, y en las bonificaciones por KGB y KPT por las usinas lácteas, diferencia que esta estrechamente vinculada con el transporte. Teniendo en cuenta el carácter económico y /o administrativo de una empresa tambera, donde entran en juego distintas variables, cuyo comportamiento podría considerarse lineal, se plantean situaciones que se pueden expresar a través de ecuaciones. La primera situación se expresa a través de una ecuación lineal con dos variables, para lo cual se espera que los alumnos la relacionen con la ecuación de una recta o una función lineal; es decir, puedan reconocer en una misma escritura los distintos aspectos de lo lineal. Luego se proponen dos problemas que se resuelven mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, uno compatible determinado y el otro incompatible, por último una situación que se modeliza mediante un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

El tratamiento de los sistemas de ecuaciones se apoya en el concepto construido de ecuación lineal con varias variables: el conjunto solución de un sistema deberá ser concebido como la intersección de los conjuntos solución de cada una de las ecuaciones involucradas.

Transformar las ecuaciones sin modificar el conjunto solución del sistema debe ser el objetivo en la resolución de los mismos, independientemente del "método" que se esté utilizando. O sea, se pone en juego la noción de sistemas equivalentes.

La representación gráfica de las soluciones de cada ecuación del sistema puede servir tanto para dar aproximadamente la solución del sistema como para verificar la obtenida numéricamente.

Detenerse a graficar, para algún sistema, los diferentes sistemas equivalentes que se fueron obteniendo en la resolución, puede aportar a la comprensión tanto del procedimiento de resolución como a la noción de sistemas equivalentes. Cuando se trata de sistemas con solución única, todas las rectas involucradas cumplen una condición: pasar por el punto solución del sistema. Por otro lado, el resultado final obtenido $x = a\ ;\ y = b$ puede leerse ahora como la intersección de una recta vertical y una horizontal.

Para los sistemas con infinitas o ninguna solución, la representación gráfica servirá como marco para interpretar lo que se obtiene en el tratamiento numérico. La noción de "pendiente" aparece aquí resignificada.

En la Actividad 4: "Formas de trabajar en matemática", se plantean cuestiones que hacen a la discusión y reflexión sobre los distintos pasos a seguir en la resolución analítica de un sistema, su comparación con la gráfica, y con los diferentes sistemas equivalentes obtenidos a partir de las transformaciones realizadas.

En las actividades matemáticas se propone a los alumnos:

- Actividad 1: Las variable en la evolución de la actividad "tambo"

  Lectura e interpretación de la información contenida en una tabla. Identificación y escritura de unidades compuestas. Cálculo de porcentaje.

- Actividad 2: Comparación de beneficios entre el tambo y la agricultura

  Lectura e interpretación de la información suministrada por una tabla y por un gráfico. Traducción al lenguaje algebraico enunciados verbales. Resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Discusión y análisis de los resultados obtenidos.

- Actividad 3: La producción de leche y las variables que interesan

Lectura e interpretación de la información suministrada por un texto. Traducción al lenguaje algebraico. Resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, sistemas de dos y tres ecuaciones con dos y tres incógnitas respectivamente. Métodos de resolución. Discusión, análisis y validación de las soluciones obtenidas.

- Actividad 4: Formas de trabajar en matemática

  Análisis, discusión y reflexión de los pasos a seguir en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, métodos de resolución analítica y su comparación con la gráfica. Esta actividad tiene como finalidad que los alumnos tomen conciencia de sus fortalezas y debilidades en la disponibilidad de las herramientas matemáticas requeridas en las actividades propuestas.

2.3.b. Sobre el Capítulo 2: Minimizar y maximizar funciones

En el Capítulo 1 se analizó las variables que intervienen en la toma de decisiones de empresas mixtas agrícola- tambera para delinear la problemática de la sustentabilidad. En este capítulo profundizaremos el estudio de las variables que intervienen en la producción y en la industrialización láctea, y utilizaremos la programación lineal, como modelo matemático, con la finalidad de maximizar los beneficios y minimizar los costos, ya que distribuir de forma óptima los recursos o más bien obtener un máximo aprovechamiento de los mismos, hacen a una mayor rentabilidad, y a la sostenibilidad de una empresa.

El problema básico será optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal, denominada función objetivo, sabiendo que las variables están sujetas a una serie de restricciones que viene expresadas por inecuaciones lineales, donde el conjunto solución se denomina conjunto restricción o conjunto solución factible. A los valores de las variables que perteneciendo al conjunto solución factible optimizan la función objetivo se denomina solución óptima. Encontrar la solución óptima es el propósito en la resolución de cualquier problema de programación lineal, para la toma de decisiones óptimas.

En relación al conjunto factible, nuestra propuesta es obtener el mismo como intersección de los semiplanos que representan a cada inecuación (restricciones); el que debe ser analizado antes de comenzar la búsqueda de la solución óptima ya que condiciona su existencia. Pueden presentarse los siguientes casos: a) un conjunto no acotado, en cuyo caso la solución óptima existe y no dependerá de las características de la función que se quiere optimizar; b) un conjunto vacío, no existe solución óptima; y c) un conjunto acotado, lo que implica la existencia de solución óptima, y ésta será única o habrá infinitas, dependiendo de las características de la función objetivo y su relación con las ecuaciones que limitan el conjunto factible.

Buscar el modelo matemático que representa una situación es uno de los grandes retos de la matemática y debe ser una preocupación en la enseñanza de la misma por su repercusión en el aprendizaje de la disciplina, así como por los procesos de pensamiento que promueve (organización, abstracción, codificación, generalización,…) teniendo, por lo tanto un valor formativo general.

La actividad 1: Esta referida a un texto relacionado con los distintos sistemas de recolección y transporte de la leche cruda para su industrialización; se analiza una tabla allí presentada, y se establecen relaciones entre la cantidad de leche por día transportada y la distancia a la planta industrial. El objeto del mismo hace a la optimización del producto que se comercializa y a su precio, a través de la maximización de la conservación de la calidad de la leche, y minimización de los costos del transporte, variables que inciden en el precio final del producto y en la sustentabilidad de las empresas.

En las actividades 2 y 3: se proponen problemas con distintos grados de dificultad; por ejemplo en el primero hay dos desigualdades que representan las restricciones estructurales del mismo, y que tiene que ver con que la materia prima y la mano de obra son cantidades finitas; pero además existen dos restricciones de no negatividad (la empresa no produce cantidades negativas de artículos); es decir el conjunto de restricciones es un sistema de cuatro inecuaciones. En el segundo problema se incrementa a tres las restricciones estructurales, pero además se agrega un requerimiento adicional que figura en forma implícita, el camión no puede trabajar más de 24 horas diarias. Y en el último se agrega el hecho de que son tres las variables que intervienen, en una de las restricciones estructurales, un dato esta en función del otro. En la actividad 3 se complejiza la interpretación del enunciado, a partir de la información dada en porcentaje tendrá que obtener los miligramos de cada vitamina para luego armar el conjunto de restricciones; pudiendo además prescindir de una de ellas.

En las actividades matemáticas se propone a los alumnos, además de la interpretación de los modelos en términos del problema planteado, las siguientes prácticas específicas:

- Actividad 1: La importancia del transporte de la leche cruda

  Lectura e interpretación de la información suministrada por una tabla de doble entrada. Relación entre variables

- Actividad 2: Minimizando costos y maximizando ganancias

  Programación Lineal con dos variables: Identificación de variables que intervienen o variables de decisión. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados. Identificación de la función principal o función que se desea optimizar, y las restricciones que deben satisfacer las variables intervinientes en cada situación. Representación de inecuaciones. Determinación del conjunto de soluciones factibles. Discusión de la solución óptima.

- Actividad 3: Incidencia de los minerales en la producción de la leche y en su valor energético

- Actividad 4: Formas de trabajar en matemática y la programación lineal

  Elaboración de enunciados dadas las restricciones y la función principal. Validación de los mismos. Explicitación y análisis de conjuntos factibles y de soluciones óptimas, explicaciones y argumentaciones utilizadas.

2.3.c. Sobre el capítulo 3 Operar con conjuntos de datos (la producción de carnes en el noreste).

En este Capítulo nos referimos a las cotizaciones del ganado vacuno de nuestro país y del MERCOSUR; ya que, por lo general, los precios de los productos ganaderos se encuentran sometidos a variaciones de precios mucho mayores que las de los costos de los insumos y demás gastos de producción, lo que incide en las ganancias del productor. Considerando la variabilidad que presentan los mercados de la carne se hace necesario para su evaluación económica contar con los promedios de los precios históricos a valores constantes, a fin de poder analizarlos en mediano y largo plazo. Teniendo en cuenta que nuestro país integra el MERCOSUR, participa con los demás países comprometidos en una política comercial externa común; que no implica precios iguales en los productos e insumos agropecuarios, pero si se tiende a un acercamiento entre los mismos. La conformación de un Mercado Común es una respuesta adecuada a la consolidación de grandes espacios económicos en el mundo y a la necesidad de lograr una adecuada inserción internacional. Es por ello que presentamos el comportamiento de las cotizaciones, en dólares, de los países que conforman el MERCOSUR, del novillo de más de 380 kg para el período 2003-2006.

El texto que se refiere al Mercado de la carne vacuna en nuestro país, muestra los cambios en la comercialización interna de la carne y el negocio de la exportación, determinando los cortes del mercado interno y haciendo hincapié en los tipos de cortes de exportación (que integran la Cuota Hilton y Cuota GATT).

El objetivo de las actividades propuestas en este primer capítulo es mostrar como es posible trabajar con la información suministradas por fuentes competentes, a través del álgebra matricial para dar respuesta a situaciones planteadas.

La organización de datos a través de una matriz permitirá contemplar un conjunto de datos desde más de una perspectiva o punto de vista, y establecer qué resuelve esta forma de representación que no lo hace una tabla (representación de un conjunto de datos en forma inteligible y transparente), y que es el *procesamiento y manipulación* del conjunto de datos a fin de ser utilizados para la obtención de otros; lo cual incide en las reglas del Álgebra matricial, cuyos principios y operaciones serán objeto de nuestro trabajo en este Capítulo.

El álgebra matricial permite:

- la expresión de un sistema complejo de ecuaciones en forma precisa y simplificada
- proporciona un método abreviado para determinar si existe una solución, antes de obtenerla, y
- proporciona los medios para resolver los sistemas de ecuaciones.

Sin embargo, el álgebra matricial sólo se puede aplicar a sistemas de ecuaciones lineales. Puesto que muchas relaciones económicas se pueden plantear aproximadamente mediante ecuaciones lineales y otras se pueden transformar en relaciones lineales, esta limitación no representa en general una dificultad grave.

En la actividad 1 el eje temático es la evolución mensual del precio del kilo vivo del novillo en el MERCOSUR, lo que permitirá comparar los precios de los distintos países que lo integran y la evolución de precios por mes en el período 2003-2006.

En la actividad 2: La suma de matrices nos permite conocer el volumen total de carne/corte exportada por semestres, años, etc. La resta de matrices nos informa acerca de la variación del volumen exportado. La multiplicación de una matriz por un número implica una variación constante en el volumen y el precio de venta.

En la actividad 3, se plantean situaciones relacionadas con la temática de industrialización láctea, y en las que se propone identificar datos y variables que intervienen, expresar relaciones entre las mismas que satisfacen una o más condiciones de la situación en estudio, explicitarlas algebraicamente, para luego resolver el sistema de ecuaciones obtenido, aplicando matrices.

En las actividades matemáticas se propone a los alumnos, además de la interpretación de los modelos en términos del problema planteado, las siguientes prácticas específicas:

- Actividad 1: La producción de carnes en Argentina y en el MERCOSUR. La organización de datos.

  Lectura e interpretación de la información suministrada por una tabla de doble entrada.

  Definición de matriz. Clasificación de matrices.

- Actividad 2: La comercialización de la carne vacuna. La evolución de las exportaciones de carnes vacunas. Organización y manipulación de datos

  Operaciones con matrices: suma y producto de una matriz por un número. producto de matrices. Matriz traspuesta.

- Actividad 3: Otra forma de resolver los problemas de la producción láctea

  Expresión matricial de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolución aplicando la matriz inversa. Discusión, análisis y validación de resultados.

- Actividad 4: Formas de trabajar en matemática. Matrices y determinantes.

  Comparación y análisis de procedimientos utilizados en la resolución de los distintos problemas. Identificación de las propiedades usadas en las argumentaciones realizada

3. Datos biográficos de los matemáticos mencionados.

ARISTÓTELES (834-322) a.C.: Gran filósofo nacido en Estagira. Fundó la escuela peripatética (daba las lecciones paseando); hizo una síntesis orgánica de todo el saber de su tiempo y formuló el primer sistema cabal de logica.

ARQUÍMEDES: (287-212 a. C.) Matemático, físico, geómetra, ingeniero e inventor griego, nacido en Siracusa. Formuló el principio hidrostático que lleva su nombre (un cuerpo sumergido en un fluido sufre un empuje hacia arriba igual al peso del líquido desplazado y aplicado en dicho centro de empuje). Inventó diferentes aparatos, entre ellos la rosca o tornillo de A (que es una superficie helicoidal que gira dentro de un tubo cilíndrico y sirve para levantar líquidos o transportar materiales granuliformes) y los espejos ustorios (enormes espejos cóncavos de bronce usados por Arquímedes-según lo que se ha transmitido-para quemar las naves de la flota romana desde las murallas de Siracusa asediada). Realizó numerosos estudios de matemáticas y física con particular referencia a la mecánica.

CANTOR, Georg (1845-1918) : Matemático alemán, Importantísimo fueron sus estudios sobre el concepto de infinito y sobre la teoría de conjuntos.

DALÍ, SALVADOR: (Figueras, Gerona, 1904 - 89) Pintor español. Tras una infancia transcurrida en la costa mediterránea, Dalí estudió concienzudamente la rutina académica en una academia de bellas artes en Madrid con un profesor que había enseñado también a Picasso. Pronto empezó a leer a Freud y a empaparse de filosofía; por las revistas de arte supo del cubismo y el futurismo. Tras un corto período en el que intentó reconciliar el cubismo con la técnica de los viejos maestros, Salvador Dalí creó su propio mundo imaginario: perspectivas lejanas de paisajes marinos, claros y luminosos, con un primer plano en que aparecían elementos tan poco relacionados entre sí como remedos de despojos anatómicos y aparatos mecánicos.

DA VINCI, LEONARDO: (1452-1519) Pintor, escultor, arquitecto, físico, matemático, ingeniero hidráulico y militar e inventor italiano. Se ocupó de óptica, de química, de geología, de astronomía; ideó instrumentos hidráulicos y náuticos. Sus estudios sobre la palanca y sobre las máquinas para volar fueron numerosos e importantísimos. Vivió en Florencia, en Milán (en la corte de Ludovico el Moro), en Venecia y en Roma (en casa de Giuliano de Médicis) y, finalmente en Amboise (Francia), en la corte de Francisco I, donde se quedó hasta la muerte.

DURERO, ALBERTO: (1471-1528) Es el artista más famoso del Renacimiento alemán, conocido en todo el mundo por sus pinturas, dibujos, grabados y escritos teóricos sobre arte, que ejercieron una profunda influencia en los artistas del siglo XVI de su propio país y de los Países Bajos. En un contexto más amplio, su interés por la geometría y las proporciones matemáticas, su profundo sentido de la historia, sus observaciones de la naturaleza y la conciencia que tenía de su propio potencial creativo son una demostración del espíritu de constante curiosidad intelectual del Renacimiento.

EUCLIDES: (siglos IV-IIIa. C.) Matemático griego. La escuela que el fundó en Alejandría fue durante siglos centro de cultura. Sus estudios se refieren sobre todo a la geometría y son famosos los dos teoremas que llevan su nombre y que conciernen a los triángulos rectángulos (I-En un triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre un cateto equivale al rectángulo que tiene como base la hipotenusa y la proyección del cateto sobre la hipotenusa. II- En un triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre la altura relativa a la hipotenusa equivale al rectángulo de las dos proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa); famoso es también el postulado que se refiere a las paralelas (por un punto puede pasar una sola recta dada). Es autor de los “Elementos”, tratado de geometría famosísimo.

FREGE, Gottlieb (1848-1925) : Matemático alemán. Es considerado uno de los iniciadores de la llamada “lógica matemática”, que analiza y explica los conceptos de toda la ciencia matemática a través de los símbolos lógicos.

HILBERT, David (1862-1943) : Matemático alemán. Sus estudios abarcan varios campos de la geometría y del análisis matemático; importantísima son sus contribuciones al estudio de la teoría de los números y de la relatividad y sus investigaciones sobre las ecuaciones integrales.

LE CORBUSIER: Charles Edouard Jeanneret-Gris (1887-1965). Es considerado el padre del modernismo, y por lo tanto fue odiado por los tradicionalistas de su época, y adorado por la juventud. Desde 1920 ejerció profesionalmente la arquitectura con el nombre de Le Corbusier, y aunque nació en Suiza, como teórico y arquitecto se encontró inserto en el contexto cultural francés.

LC es el arquitecto más prolífico del siglo XX en cuanto a su obra escrita, y sus planteamientos teóricos ejercieron una influencia mayor a la de sus construcciones, aun cuando con LC nos encontramos frente al extraño caso de un arquitecto cuyos planteamientos teóricos preceden a su actividad constructiva. LC se encontró siempre cercano a la idea de que el arte debía servir para la superación del hombre. De ahí que, se haya presentado a sí mismo como un arquitecto único que sólo tenía antecesores y sucesores. LC establecía una igualdad entre la arquitectura y la estética de la ingeniería, ya que para él la ley de la economía es lo que nos conduce a una armonía con las leyes del universo. Sin embargo, al mismo tiempo sostiene que el arquitecto establece una ordenación de las formas, en el puro sentido de una creación de su intelecto y “nos da la medida de un orden que intuimos concordante con el mundo.” Para LC, el misterio de la arquitectura se halla en la geometría y en las proporciones, es decir con lo que él identifica como la sección áurea”. las formas geométricas básicas pasan a ser fundamentos y la geometría se convierte en el lenguaje de la humanidad, que por su parte crea el orden a través de la misma, junto a la medida, con lo cual establece una armonía entre las obras del hombre y el orden universal.

De ahí que, para LC, la urbanística es el resultado de la geometría y el funcionalismo. La línea recta y el ángulo recto aparecen como los únicos criterios válidos de planificación. Postula también la separación de funciones: de la vivienda, del trabajo, del recreo y de la circulación. esta última pasa a ser la base de la planificación, según estudios estadísticos. En 1965, LC falleció en un accidente mientras se bañaba en el mar Mediterráneo. Más que ningún otro hombre, se dio cuenta de que nuevos métodos de construcción, estructura, iluminación, calefacción, etc. significaban algo más que mero cambio formal; construían más bien toda una nueva estética que debía ser diseñada con al menos la misma humanidad y pasión que cualquier arquitectura en el pasado.

LEONARDO DE PISA (FIBONACCI): (siglos XII-XIII) Matemático italiano. Hijo de un comerciante que tenía de sobrenombre Bonaccio, fue encaminado por su padre en el comercio y viajó mucho por los países mediterráneos. Pero sus intereses se encaminaron a las ciencias y de regreso de uno de sus viajes, en 1202, publicó su mejor obra “Liber Abbaci” que le permitió el acceso a la corte de Federico II. A este tratado le siguieron otros sobre geometría y astronomía. En esa época en Italia los estudios de ese tipo eran casi inexistentes y se debe a Fibonacci que volvieran a estar en auge; se le atribuye también el mérito de haber introducido el uso de las cifras llamadas “árabes”.

PACIOLI, LUCA: (1445-1509) Matemático italiano. En 1464 se estableció en Venecia donde se especializó en ciencias comerciales; luego se hizo hermano franciscano y fue profesor de matemáticas en Perusa y en otras universidades; finalmente se estableció en Roma y allí se quedó hasta su muerte. Es autor de una obra importantísima para su época

(“Summa de aritmética, geometría, proportionalita”) que es un verdadero compendio de aritmética, álgebra y geometría. Allí se encuentran todos los conocimientos de la época en los diferentes campos indicados. Forma parte de Summa también un verdadero manual de contabilidad comercial en el que se explica la partida doble y trae una tabla con todas las monedas y medidas usadas en las diferentes ciudades de Italia. Pacioli tradujo también del latín los “Elementos” de Euclides. Fue amigo de Leonardo da Vinci y él también fue pintor.

PITÁGORAS DE SAMOS (571-497 a.C.) : Famoso matemático y filósofo griego, nacido en Samos. Abrió dos escuelas en la Magna Grecia, en las cuales por primera vez se admitieron mujeres. Para Pitágoras, el número es la “esencia de todas las cosas”, ya que existe un orden mesurable en todos los fenómenos del universo. Este concepto racionalistico fue muy importante para el desarrollo de la civilización europea. Se debe a la escuela pitagórica la primera hipótesis heliocéntrica luego de la retomada por Aristarco en el siglo III a.C.

POINCARÉ, Jules-Henri (1854-1912) : Matemático, astrónomo y físico francés. Realizó importantes estudios sobre la teoría de las funciones; se interesó en los demás problemas de filosofía de las ciencias, se dedicó a los estudios de astronomía, de físico-matemática y de geometría no euclideana.

RUSSELL, Bertrand Arthur William (1872-1970) : Matemático, filósofo, escritor ingles. Su interés por la matemática fue notable: como Peano y Frege, identifico las matemáticas con la lógica, basado a su vez en una teoría de las relaciones que comprenden todo tipo de experiencia. En lo que respecta a sus estudios de matemática encontramos entre sus obras: Principios de Matemática (1903), Principia Matemática (3 volúmenes, 1910-1913, escritos en colaboración con Whitehead), Misticismo y Lógica (1918).

TARSKI, Alfred: Matemático y lógico polaco, nacido en 1902. Se graduó y obtuvo la docencia libre en la universidad de Varsovia en 1924. obtuvo numerosos reconocimientos y premios y premios por sus investigaciones que conciernen al álgebra, la lingüística, la semántica, la matemática.

THALES DE MILETO: (alrededor 624-546 a.C.) Matemático, astrónomo, filósofo griego. Puede decirse que fue el primero de los griegos que estudió las matemáticas y las otras ciencias conexas con un interés puramente científico. Es el primer filósofo de la escuela jónica, la más antigua de Grecia. De joven fue mercader, luego tuvo cargos políticos, sólo en los últimos años de su vida se dedicó a sus estudios preferidos. Puso como principio de todas las cosas un elemento físico: el agua.

4. Bibliografia complementaria:

4.1. Para el eje Diseñar....

Si Usted quiere ampliar la información sobre los temas planteados, puede consultar los siguientes textos:

- Gonzalez, Ricardo Luengo (1990) coordinador del grupo Beta “Proporcionalidad Geométrica y semejanza”. Editorial Síntesis.
- Fiol Mora María Luisa, Fortuny Aymemi José María (1990) “Proporcionalidad Directa. La forma y el número”. Editorial Síntesis.
- Claudia Alsina (1995) “Viaje al País de los rectángulos”. Red Olimpica
- Godino Juan, Batanero Carmen (2002)” Proporcionalidad”. Proyecto Edumat. Maestros.
- Desarrollo Curricular N° 2 EGB 1 y 2 “Una Forma de Uso de la Proporcionalidad: Las Escalas”. Consejo provincial de Educación de Río Negro.

* Páginas Web donde se puede hallar más información sobre lo desarrollado:

** www.mensa.com.ar/Mensapiens/archivos/Mensapiens025.pdf*

** www.me.gov.ar/curriform/servicios/unidad/aprender/laminas/egb3/lamm3-2.pdf*

** www.me.gov.ar/curriform/servicios/unidad/aprender/cuadern/docente/docegb3.pdf -*

** www.matejoven.mendoza.edu.ar/curiosi.htm*

** www.uhu.es/candido.pineiro/historia/pintura.pdf -*

* www.aldeaeducativa.com/aldea/Biograf2.asp?Which1=500 -

* www.babab.com/no11/poetica_matematica.htm - 34k -

* www.wikipedia.org/wiki/Alberto_Durero - 38k -

* www.epsilones.com/paginas/i-artes1.html - 80k -

4.2. Para el eje Argumentar....

GENTILE, Enzo R., Notas de Álgebra. Ediciones Colihue. EUDEBA. 1998.

GUZMAN, Miguel de; COLERA, Jose; SALVADOR, Adela. Matemáticas. Bachillerato 1. Grupo Anaya. Madrid. 1991.

SPIEGEL, Murray R.; Serie de compendios Schaum. Teoría y problemas de algebre superior. MacGraww-Hill. Febrero 1985.

4.3. Para el eje Decidir....

* Guy Brousseau. Profesor emérito del IUFM de Aquitaine (Francia). En su trabajo: Educación y Didáctica de las matemáticas presentado en el V Congreso Nacional de Investigación Educativa. Aguascalientes, Ags. 30 y 31 de octubre y 1º y 2 de noviembre de 1999.

* INRP, 1986, .Apprentissages à la résolution des problèmes au cours élémentaire, Equipe de recherché sur l. enseignement des mathématiques, Francia.

* Arsac, G. Chapiron y col., 1992, Initiation au raisonnement déductif au collège, Presses universitaire de Lyon, IREM, Francia.

* Chevallard, Yves; Bosch, Marianna; Gascón, Josep. Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. ICE – HORSORI. Universidad de Barcelona.

* Bruner, Jerome S.; Ceruti, Mauro; Preta, Lorena y otros. Imágenes y Metáforas de la ciencia. Compilación. Alianza. Versión en español. Madrid 1993.

* Santaló, Luis. La matemática: una filosofia y una técnica. cap.1: La matemática: Ténica, Arte, Filosofía y Ciencia. Ariel. Colección Nº124. Barcelona. 1994.

* Santaló, Luis A: Enseñanza de la matemática en la escuela media. 1981- Editorial Docencia

* Babini, José. Historia de las ideas modernas en matemática. Secretaría General de la organización de los Estados Americanos. Programa Regional de desarrollo Científico y Tecnológico. Serie de Matemática. Monografía Nº4. Tercera edición. 1980.

* Newman, James R., SIGMA. El mundo de las matemáticas Nº5. Capítulo 8: Apología del Matemático. Grijalbo. G. H. Hardy. Pág. 416 - 423

* Berté, Annie. Matemática Dinámica. Temas y problemas EGB. Ministerio de Educación y Cultura de la Nación. Situación de Enseñanza Nº7. págs. 163-185.

* Boyer, Carl B.; Historia de la Matemática. Capítulos IV, V y VI. Alianza. 1996.

Paginas de internet para ampliar

* Paginas donde pueden encontrar articulos sobre metalenguaje y el trabajo de Tarski

http://www.ucm.es/info/pslogica/verdadtarski.pdf

http://serbal.pntic.mec.es/%7Ecmunoz11/tarski.pdf

* Página donde pueden hallar propuestas con otras paradojas

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Problemas/05-1-p-log.html

* Pagina con la historia de Zenon y la relacion con su paradoja

http://centros5.pntic.mec.es/ies.ortega.y.rubio/Mathis/Zenon/zenon.htm

* Pagina con propuesta para enseñar paradojas

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/imagina/es_y_no_es.htm

* Sobre Euclides

http://enebro.cnice.mecd.es/~jhep0004/Paginas/ElenManu/euclides.htm

* Gacetilla Matemática

El Teorema de Pitágoras

http://www.arrakis.es/~mcj/teorema.htm

* Páginas sobre el Teorema de Pitágoras

http://www.arrakis.es/~mcj/teorema.htm La Gacetilla Matemática dedica un amplio espacio a este Teorema.

* Sobre Belleza en matematica

Revista de la investigación europea

Sitio: http://ec.europa.eu/research/rtdinfo/special_as/print_article_813_es.html#1

Presenta un artículo del cual transcribimos su copete, tratando de mostrar algunos aspectos del artículo: La belleza de las matemáticas.

"Muchos matemáticos consideran que su disciplina es un arte. Trabajan a partir de sus métodos específicos, pero también sobre algunas teorías estéticas que se aplican a la creación artística. Por otro lado, un cierto número de artistas siente atracción y/o estimulación por las matemáticas y utilizan algunas ideas desarrolladas por los científicos". Este punto de vista es el de Michele Emmer, matemático y cineasta. Zoom sobre las relaciones entre el arte y las matemáticas, la imagen y la visualización, la estética y la pedagogía.

Otros

PROYECTO DESCARTES (ESPAÑA)

El proyecto Descartes tiene como principal finalidad promover nuevas formas de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas integrando las TIC en el aula como herramienta didáctica.

Durante los últimos veinte años el Ministerio de Educación y Ciencia de España ha puesto en marcha numerosos proyectos para promover la utilización de las tecnologías de la información y de la comunicación como recurso didáctico, desde el año 1985 que se implantó el proyecto Atenea hemos ido adquiriendo experiencia sobre cuáles son las aplicaciones que son útiles en las aulas, analizando las ventajas e inconvenientes que presenta el uso del ordenador con los alumnos y las estrategias más convenientes para la implantación de las TIC en los centros, así como las dificultades que surgen en el desarrollo de las herramientas y los materiales para el aprendizaje.

La página para acceder a este sitio es : http://descartes.cnice.mecd.es/index.html

Índice

Datos biográficos